Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.3, 2014
www.icp.az/2014/3-12.pdf

УДК 517.977.52

Р.О. МАСТАЛИЕВ

ОБ ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ

Изучается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: разностные и интегро-дифференциальные уравнения типа Волтерра, ступенчатая задача, необходимое условие оптимальности, принцип максимума.

1.Введение. Многие встречающиеся в практике процессы по своей природе имеют более сложную структуру, являясь ступенчатыми процессами. Такие процессы считаются подклассом гибридных систем. Ступенчатые процессы встречаются в задачах управления химико-технологическими процессами, в задачах управления автоматизированными производственными системами конвейерного типа, в задачах оценки качества состояния воды в бассейне реки в зависимости от выбросов промышленными предприятиями загрязняющих веществ, в литейном производстве и др.(см.напр.([1,2]).

В [3] рассмотрена ступенчатая задача оптимального управления, описываемая разностными уравнениями типа Вольтерра.

Настоящая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности в ступенчатых задачах оптимального управления, описываемых разностными и интегро- дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(t_2)), \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau)), \qquad t\in T_1=\{t_0,t_0+1,t_0+2,\dots,t_1-1\}, \\ x(t_0)=x_0, \\ \dot{y}(t)=\int\limits_{t_0}^{t} g(t,\tau,y(\tau),v(\tau))d\tau, \qquad t\in T_2=[t_1,t_2], \\ y(t_1)=G(x(t_1)). \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $t_0,\ t_1,\ t_2,\ x_0$ − заданы, причем разность t_1-t_0 - натуральное число, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$- заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $f(t,\tau,x,u)$, $(g(t,\tau,y,v))$ - заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y), $G(x)$ − заданная непрерывно- дифференцируемая m-мерная вектор-функция, $u(t)$ $(v(t))$ r (q)-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} &u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T_1, \\ &v(t)\in V\subset R^q, \quad t\in T_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ − допустимым процессом.

Нашей целью является вывод необходимого условия оптимальности в рассматриваемой задаче.

3. Формула приращения критерия качества. Считая $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ − оптимальным процессом, через $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta x(t))$ − обозначим произвольный допустимый процесс и запишем формулу приращения функционала

$$\Delta S(u^o, v^o) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1)) + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)). \quad (3.1)$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} [f(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)) - f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))], \quad (3.2)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad t \in T_1, \quad (3.3)$$

$$\Delta \dot{y}(t) = \int_{t_0}^{t} [g(t,\tau,\bar{y}(\tau),\bar{v}(\tau)) - g(t,\tau,y(\tau),v(\tau))] d\tau, \quad t \in T_2 \quad (3.4)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1)). \quad (3.5)$$

Через $(\psi^o(t), p^o(t))$ обозначим пока неизвестную $(n+m)$-мерную вектор-функцию.

Умножая обе части соотношений (3.2), (3.4) соответственно на $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ скалярно, а затем, соответственно суммируя и интегрируя полученные тождества по T_1 и T_2 имеем:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^o(\tau) [f(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - f(\tau,t,x(t),u(t))], \quad (3.6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta \dot{y}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t}^{t_2} p(\tau) [g(\tau,t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)) - g(\tau,t,y(t),v(t))] d\tau \, dt, \quad (3.7)$$

Ясно что,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t) \Delta x(t+1) = \psi^o(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t-1) \Delta x(t),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p^o(t_2) \Delta y(t_2) - p^o(t_1) \Delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^o(t) \Delta y(t) dt.$$

Отсюда с учетом (3.5) имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta \dot{y}(t) dt = p^o(t_2) \Delta y(t_2) - p^o(t_1) (G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^o(t) \Delta y(t) dt.$$

Принимая во внимания эти тождества, формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}\Delta S\left(u^o, v^o\right) = \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y(t_2)) + \psi^o(t_1-1)\Delta x(t_1) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^o(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^o(\tau)\left[f(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - f(\tau,t,x(t),u(t))\right] + \\ + p^o(t_2)\Delta y(t_2) - p^o(t_1)\left(G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))\right) - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^o(t)\Delta y(t)dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2}\int_{t}^{t_2}p^o(\tau)\left[g(\tau,t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)) - g(\tau,t,y^o(t),v^o(t))\right]d\tau\, dt.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Введем обозначения

$$H\left(t,x,u,\psi^o\right) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^{o'}(\tau)\, f(\tau,t,x,u),$$

$$M\left(t,y,v,p^o\right) = \int_{t}^{t_2}p^{o'}(\tau)g(\tau,t,y,v)d\tau\ ,$$

$$N(x) = p^{o'}(t_1-1)G(x).$$

Тогда формула приращения (3.8) представляется в виде

$$\begin{aligned}\Delta S\left(u^o, v^o\right) = \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y(t_2)) + \psi^o(t_1-1)\Delta x(t_1) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^o(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi^o(t)\right) - H\left(t,x(t),u(t),\psi^o(t)\right)\right] + \\ + p^o(t_2)\Delta y(t_2) - \left(N(\bar{x}(t_1)) - N(x(t_1))\right) - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^o(t)\Delta y(t)dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2}\left[M\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p^o(t)\right) - M\left(t,y(t),v(t),p^o(t)\right)\right]dt.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Используя формулу Тейлора из (3.9) после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}\Delta S\left(u^o, v^o\right) = \frac{\partial\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1) + \frac{\partial\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2) + \psi^o(t_1-1)\Delta x(t_1) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^o(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_x\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}(t)}H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}}H_x\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta x(t) + p^0(t_2)\Delta y(t_2) - \frac{\partial N(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1) - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^o(t)\Delta y(t)dt -\end{aligned}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial y} \Delta y(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}(t)} M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}(t)} M_y\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) \Delta y(t) dt + o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) + o_2\left(\|\Delta y(t_2)\|\right) - o_3\left(\|\Delta x(t)\|\right) - \tag{3.10}$$

$$- o_4\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) - o_5\left(\|\Delta y(t)\|\right).$$

Здесь по определению

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H\left(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \varphi^\circ(t)\right) = H\left(t, x^\circ(t), \bar{u}(t), \psi^\circ(t)\right) - H\left(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \varphi^\circ(t)\right)$$

$$\Delta_{\bar{v}(t)} M\left(t, y^\circ(t), v^\circ(t), p^\circ(t)\right) = M\left(t, y^\circ(t), \bar{v}(t), p^\circ(t)\right) - M\left(t, y^\circ(t), v^\circ(t), p^\circ(t)\right)$$

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H_x\left(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \psi^\circ(t)\right) = H_x\left(t, x^\circ(t), \bar{u}(t), \psi^\circ(t)\right) - H_x\left(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \psi^\circ(t)\right)$$

$$\Delta_{\bar{v}(t)} M_y\left(t, y^\circ(t), v^\circ(t), \psi^\circ(t)\right) = M_y\left(t, y^\circ(t), \bar{v}(t), p^\circ(t)\right) - M_y\left(t, y^\circ(t), v^\circ(t), p^\circ(t)\right)$$

Если предполагать, что вектор-функция $\left(\psi^o(t), p^o(t)\right)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}
\psi^o(t-1) = H_x\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right), \\
\psi^o(t_1 - 1) = -\frac{\partial \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x} + \frac{\partial N\left(x(t_1)\right)}{\partial x}, \\
p^o(t) = M_y\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right), \\
p^o(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y},
\end{gathered} \tag{3.11}$$

то формула приращения (3.10) критерия качества (2.1) примет вид

$$\begin{gathered}
\Delta S\left(u^o, v^o\right) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right) - \\
-\int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) dt + \eta(\Delta u, \Delta v).
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u, \Delta v) = o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|\right) + o_2\left(\|\Delta y(t_2)\|\right) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3\left(\|\Delta x(t)\|\right) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} o_4\left(\|\Delta y(t)\|\right) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H_x\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)\right) \Delta x(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \Delta_{\bar{v}} H_y\left(t, y^o(t), v^o(t), p(t)\right) \Delta y(t).$$

Формула приращения (3.12) позволяет получить необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина.

4. Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Если предположить, что множество

$$f\left(t, \tau, x^o(\tau), U\right) = \left\{\alpha : \ \alpha = f\left(t, \tau, x^o(\tau), u\right), \ u \in U\right\} \tag{4.1}$$

выпукло, то специальное приращение допустимого управления $u^o(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = u(t; \varepsilon) - u^o(t), \qquad t \in T_1 \tag{4.2}$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $u(t; \varepsilon) \in U$, $t \in T_1$ такие допустимые управляющие функции, что

$$\Delta_{u(\tau;\,\varepsilon)} f\left(t,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)=\varepsilon\,\Delta_{u(\tau)} f\left(t,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right). \tag{4.3}$$

Здесь $u(t)\in U,\ t\in T_1$ произвольное допустимое управление соответствуют $u(t;\varepsilon)$.

Пусть $\Delta v(t)\equiv 0$.

Через $\left(\Delta x_\varepsilon(t),\ \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ обозначим специальное приращение оптимальной траектории $\left(x^o(t),y^o(t)\right)$, соответствующее специальному приращению управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$.

Из оценок, установленных в работах [4,с.22-25; 5, с.37-38; 6, с.155-156] и других следует справедливость :

$$\begin{aligned}&\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\|\le L_1\,\varepsilon,\quad t\in T_1\cup t_1,\\&\left\|\Delta y_\varepsilon(t)\right\|\le L_2\,\varepsilon\ \ t\in T_2\cup t_2.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь L_1, L_2 положительные постоянные.

С учетом этого факта, из (3.12) получаем справедливость разложения.

$$S\left(u^\circ+\Delta u_\varepsilon,v^\circ\right)-S\left(u^\circ,v^\circ\right)=-\varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(t)}H\left(t,x^\circ(t),u^\circ(t),\psi^\circ(t)\right)\right]+o(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Если же специальное приращение оптимального управления $\left(u^\circ(t),v^\circ(t)\right)$ определить по формуле

$$\Delta u(t)=0,\ t\in T_1,$$

$$\Delta v_\delta(t)=\begin{cases}v-v^o(t),t\in[\theta,\theta+\delta)\\ 0,t\in T_2/[\theta,\theta+\delta),\end{cases}$$

где $\theta\in[t_1,t_2)$ - произвольная точка непрерывности управляющей функции $v^o(t)$, $\delta>0$ достаточно малое произвольное число такое, что $\theta+\delta<t_2$, $v\in V$ − произвольной вектор то из (3.12) следует разложение

$$\begin{aligned}&\Delta S\left(u^\circ,v^\circ\right)=S\left(u^\circ,v^\circ+\Delta v_\delta\right)-S\left(u^\circ,v^\circ\right)=\\&=-\delta\Delta_v M(\theta,y^o(\theta),v^o(\theta),p^\circ(\theta))+o(\delta).\end{aligned} \tag{4.6}$$

С учетом разложений (4.5), (4.6) приходим к утверждению.

Теорема 1. Если множество (4.1) выпукло, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ в задаче (2.1)-(2.2) необходимо, чтобы для всех $u(t)\in U$, $t\in T_1$, $v\in V$, $\theta\in T_2$ выполнялись соответственно соотношения

$$\begin{aligned}&\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(t)}H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\le 0,\\&\Delta_v M\left(\theta,y^o(\theta),v^o(\theta),p^o(\theta)\right)\le 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Соотношения (4.7) представляют собой необходимое условие оптимальности первого порядка в форме условия максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

5. Выводы. В работе при помощи метода приращений получено необходимое условие оптимальности в форме условия максимума Понтрягина.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант № EİF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1

Литература

1. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. 2003, т.8, с. 103-108.
2. Лемперт А.А., Урбанович Д.Е. Оптимизация сбросов заграздяющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях // География и природные ресурсы. Спецальный выпуск. 2004, с.212-215.
3. Масталиев Р.О. Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-мат. наук. 2010, № 1, с. 33-39
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн. "Наука и техника", 1974, 274 с.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку. Изд-во БГУ, 2002, 114 с.
6. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку, Изд-во «Элм», 2013, 224 с.

UOT 517.977.52
R.O. Məstəliyev. Diskret-kəsilməz sistemli bir pilləvari optimal idarəetmə məsələsi haqqında.
Məqalədə Volterra tip fərq və inteqro- diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir pilləvarı optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi mənasında zəruri şərt isbat olunmuşdur.
Açar sözlər: Vollterra tip fərq və inteqro-diferensial tənliklər, pilləvarı məsələ, optimallıq üçün zəruri şərt, maksimum prinsipi

R.O. Mastaliev. On a stepwise problem of optimal control by discrete-continuoun systems. *A stepwise optimal control problem described by a system of difference and inteqro-differential equations of the Voltera type is studied. The necessary optimality condition in the form of Pontryagins discrete principle of maximum is proved.*
Keywords: difference and inteqro-differential equations of the Volterra, stepwise problem, necessary conditions of optimality, principle of the maximum

Институт кибернетики НАНА Представлено 08.04.2014