Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.3, 2014
www.icp.az/2014/3-14.pdf

УДК 519.21

Я.С. ТУНДЖ, Э.А. ИБАЕВ, Ш.Б. БАХШИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ СНОСОМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

Пользуясь последовательностью независимых, одинаково распределенных положительных двумерных случайных величин строится процесс полумарковского блуждания с положительным сносом, отрицательными скачками. Находится преобразование Лапласа по времени, преобразование Фурье-Стильтьеса по фазе процесса полумарковского блуждания с положительным сносом и отрицательными скачками.

Ключевые слова: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, преобразование Фурье-Стильтьеса

1. Введение. В работе [1,с. 2154-2171], изучен процесс полумарковского блуждания, когда блуждание имеет гауссовское распределение, в [2,с.69-76] исследованы различные задачи, связанные с граничными функционалами случайного блуждания. В [3, с. 192] найдено преобразование Лапласа эргодического распределения процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками задерживающим экраном в нуле. В [4, с. 61-63] изучено асимптотическое поведение момента достижения заданного уровня невозвратным одномерным случайным блужданием в случайной среде с задерживающим экраном в нуле, скачки которого принимают три значения: -1, 0, +1.

В данной работе исследуется распределение процесса полумарковского блуждания с положительным сносом, отрицательными скачками. Найден явный вид преобразования Лапласа по времени, преобразования Фурье-Стильтьеса по фазе условного распределения.

2. Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ задана последовательность $\{\xi_k, \zeta_k\}_{k=\overline{1,\infty}}$ независимых, одинаково распределенных положительных и независимых между собою случайных величин ξ_k и ζ_k.

Исходя из этой последовательности построим следующий процесс

$$X(t) = z + t - \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \text{ , если } \sum_{i=0}^{k} \xi_i \le t < \sum_{i=0}^{k+1} \xi_i ,\ k = 0,1,2,...$$

Наша цель найти распределение процесса $X(t)$

3. Метод решения. По формуле полной вероятности имеем

$$P\{X(t) < x | X(0) = z\} = P\{X(t) < x, \xi_1 > t | X(0) = z\} +$$

$$+ \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{S=0}^{t} P\{\xi_1 \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\} P\{X(t-s) < x | X(0) = y\}.$$

Обозначим

$$R(t, x|z) = P\{X(t) < x | X(0) = z\}.$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$R(t, x|z) = P\{z + t < x ; \xi_1 > t\} + \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{t=0}^{t} P\{\xi_1 \in ds; X(s) \in dy | X(0) = z\} R(t-s, x|y\}.$$

Обозначим

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} R(t, x|z),\ \theta > 0\,.$$

Тогда имеем

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{t < x-z\} P\{\xi_1 > t\}dt +$$

$$+ \int_{y=-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\theta, x|y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1 \in dt; z+t-\zeta_1 \in dy\}$$

или

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z} e^{-\theta t} P\{\xi_1 > t\}dt + \int_{y=-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\theta, x|z)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} d_y\, d_t P\{\xi_1 < t; z+t-\zeta_1 < y\}$$

Во втором слагаемом учитывая формулу $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ имеем

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z} e^{-\theta t} P\{\xi_1 > t\}dt - \int_{y=-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\theta, x|y)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} d_y\, d_t P\{\xi_1 < t; \zeta_1 < z+t-y\}.$$

Во втором слагаемом должно быть $z+t-y > 0 \Rightarrow t > \max(0, y-z)$

Поэтому имеем

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z} e^{-\theta t} P\{\xi_1 > t\}dt -$$

$$- \int_{y=-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\theta, x|y) \int_{t=\max(0, y-z)}^{\infty} e^{-\theta t} d_y P\{\zeta_1 < z+t-y\} dP\{\xi_1 < t\}. \qquad (3.1)$$

Учитывая, что

$$\max\{0, y-z\} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < z, \\ y-z, & \text{если} \quad y > z, \end{cases}$$

(3.1) примет вид

$$\tilde{R}(\theta, x|z) = \varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z} e^{-\theta t} P\{\xi_1 > t\}dt - \int_{y=-\infty}^{z} \tilde{R}(\theta, x|y) \int_{tt=0}^{\infty} e^{-\theta t} d_y P\{\zeta_1 < z+t-y\} dP\{\xi_1 < t\} -$$

$$- \int_{y=z}^{\infty} \tilde{R}(\theta, x|y) \int_{t=y-z}^{\infty} e^{-\theta t} d_y P\{\zeta_1 < z+t-y\} dP\{\xi_1 < t\}. \qquad (3.2)$$

Обозначим

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \gamma|z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} d_y \tilde{R}(\theta, x|z), \qquad \gamma \in R\,.$$

Тогда (3.2) примет вид

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \gamma|z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} d_x \varepsilon(x-z) \int_{t=0}^{x-z} P\{\xi_1 > t\}dt - \int_{y=-\infty}^{z} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \gamma|y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} d_y P\{\zeta_1 < z+t-y\} dP\{\xi_1 < t\} -$$

$$-\int_{y=z}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)\int_{t=y-z}^{\infty}e^{-\theta t}d_yP\{\zeta_1<z+t-y\}dP\{\xi_1<t\}. \qquad (3.3)$$

(3.3) решить в явном виде очень сложно. Но его будем решить в классе эрланговских распределений первого порядка, хотя можно решить и в случае эрланговских распределений высокого порядка.

Итак, пусть

$$P\{\xi_1<t\}=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\varepsilon(t),\ \lambda>0,\ t>0,$$
$$P\{\xi_1<t\}=\left(1-e^{-\mu t}\right)\varepsilon(t),\ \mu>0,\ t>0.$$
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Тогда (3.3) примет вид

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\gamma x}d_x\varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z}e^{-(\lambda+\theta)t}dt+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{-\mu z}\int_{y=-\infty}^{z}e^{\mu y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)+$$
$$+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{-\mu z}\int_{y=-\infty}^{z}e^{\mu y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{(\lambda+\theta)z}\int_{y=z}^{\infty}e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy\ .$$

Легко увидеть, что

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{i\gamma x}d_y\varepsilon(x-z)\int_{t=0}^{x-z}e^{-(\lambda+\theta)t}dt=\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{i\gamma x}\varepsilon(x-z)d_x\int_{t=0}^{x-z}e^{-(\lambda+\theta)t}dt+\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{i\gamma x}\int_{t=0}^{x-z}e^{-(\lambda+\theta)\lambda}d_x\varepsilon(x-z)=$$
$$=\int_{x=z}^{\infty}e^{i\gamma x}e^{-(\lambda+\theta)(x-z)}dx=\frac{e^{i\gamma z}}{\lambda+\theta-i\gamma}\ .$$

Наконец, в случае экспоненциального распределения для $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)$ получим следующее интегральное уравнение

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=\frac{e^{i\gamma z}}{\lambda+\theta-i\gamma}+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{-\mu z}\int_{y=-\infty}^{z}e^{\mu y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy+$$
$$+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{(\lambda+\theta)z}\int_{y=z}^{\infty}e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy.$$

Решим это уравнение

Обе чисти его умножим на $e^{\mu z}$

$$e^{\mu z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=\frac{e^{(\mu+ij)z}}{\lambda+\theta-i\gamma}+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\int_{y=-\infty}^{z}e^{\mu y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy+$$
$$+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{(\lambda+\mu+\theta)z}\int_{y=z}^{\infty}e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy\ .$$

Обе части продифференцируем по z

$$\left[\mu\,\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)+\tilde{\tilde{R}}_z'(\theta,\gamma|z)\right]e^{\mu z}=\frac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma}e^{(\mu+i\gamma)z}+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{\mu z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)+$$
$$\lambda\mu\,e^{(\lambda+\mu+\theta)z}\int_{y=z}^{\infty}e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}e^{\mu z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)$$

Обе части разделим на $e^{\mu z}$

$$\mu\,\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)+\tilde{\tilde{R}}_z'(\theta,\gamma|z)=\frac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma}e^{i\gamma z}+\lambda\mu\,e^{(\lambda+\theta)z}\int_{y=z}^{\infty}e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy. \tag{3.4}$$

Обе части умножим на $e^{-(\lambda+\theta)z}$ и продифференцируем по z.

$$-(\lambda+\theta)\left[\mu\,\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)+\tilde{\tilde{R}}_z'(\theta,\gamma|z)\right]e^{-(\lambda+\theta)z}+\left[\mu\,\tilde{\tilde{R}}_z'(\theta,\gamma|z)+\tilde{\tilde{R}}_z''(\theta,\gamma|z)\right]e^{-(\lambda+\theta)z}=$$
$$=-(\mu+i\gamma)e^{-(\lambda+\theta-i\gamma)z}-\lambda\mu e^{-(\lambda+\theta)z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)$$

Обе части умножив на $e^{(\lambda+\theta)z}$ и производив некоторые упрощения получим дифференциальное для $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)$

$$\tilde{\tilde{R}}_z''(\theta,\gamma|z)-(\lambda-\mu+\theta)\tilde{\tilde{R}}_z'\theta,\gamma|z)-\theta\mu\,\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=-(\mu+i\gamma)e^{i\gamma z}. \tag{3.5}$$

Оно имеет решение

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=c_1(\theta)e^{k_1(\theta)z}+c_2(\theta)e^{k_2(\theta)z}+\tilde{\tilde{R}}_{соб}(\theta,\gamma|z),$$

где $k_1(\theta)$ и $k_2(\theta)$ корни характеристического уравнения соответствующим дифференциальному уравнению (3.5)

$$k^2(\theta)-(\lambda-\mu+\theta)k(\theta)-\theta\mu=0,$$
$$\tilde{\tilde{R}}_{соб}(\theta,\gamma|z)=-\frac{(\mu+i\gamma)}{[(i\gamma-k_1(\theta)][(i\gamma-k_2(\theta)]}e^{i\gamma z}$$

Тогда имеем

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=c_1(\theta)e^{k_1(\theta)z}+c_2(\theta)e^{k_2(\theta)z}-\frac{\mu+i\gamma}{[i\gamma-k_1(\theta)][i\gamma-k_2(\theta)]}e^{i\gamma z}. \tag{3.6}$$

Обозначим $A=\dfrac{\mu+i\gamma}{[i\gamma-k_1(\theta)][i\gamma-k_2(\theta)]}$.

Теперь найдем постоянные $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$ относительно z

Из (3.3) и (3.4) находим граничные условия

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|0) = \dfrac{1}{\lambda+\theta-i\gamma} + \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\displaystyle\int_{y=-\infty}^{0} e^{\mu y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy + \\ \qquad + \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy \\ \mu\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|0) + \tilde{\tilde{R}}'_z(\theta,\gamma|0) = \dfrac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma} + \lambda\mu\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\theta)y}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)dy \end{cases} \tag{3.7}$$

Из (3.6) значения $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|0)$ и $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|y)$ подставим в (3.7).

Тогда имеем

$$\begin{cases} c_1(\theta)+c_2(\theta)-A = \dfrac{1}{\lambda+\theta-i\gamma} + \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\displaystyle\int_{y=-\infty}^{0} e^{\mu y}\left[c_1(\theta)e^{k_1(\theta)y} + c_2(\theta)e^{k_2(\theta)y} - Ae^{i\gamma y}\right]dy \\ \mu c_1(\theta)+\mu c_2(\theta)-\mu A + k_1(\theta)c_1(\theta)+k_2(\theta)c_2(\theta)-i\gamma A] = \dfrac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma} + \\ + \lambda\mu\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\theta)y}\left[c_1(\theta)e^{k_1(\theta)y} + c_2(\theta)e^{k_2(\theta)y} + Ae^{i\gamma y}\right]dy. \end{cases}$$

Производим некоторые упрощения

$$\begin{cases} \left[1-\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}\right]c_1(\theta) + \left[1-\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_2(\theta)]}\right]c_2(\theta) = \dfrac{1}{\lambda+\theta-i\gamma} + \\ + A - \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)}\cdot\dfrac{A}{\mu+i\gamma} \\ \left[\mu+k_1(\theta)-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\theta-k_1(\theta)}\right]c_1(\theta) + \left[\mu+k_2(\theta)-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\theta-k_2(\theta)}\right]c_2(\theta) = \dfrac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma} + \\ + i\gamma A + \mu A - \dfrac{\lambda\mu A}{\lambda+\theta-i\gamma} \end{cases}$$

Итак получим систему алгебраических уравнений относительно $c_1(\theta)$ и $c_2(\theta)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda\mu+\mu^2+\mu\theta+(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)-\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}c_1(\theta) + \dfrac{\lambda\mu+\mu^2+\mu\theta+(\lambda+\mu+\theta)k_2(\theta)-\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}c_2(\theta) = \\ = \dfrac{1}{\lambda+\theta-i\gamma} + \left[1-\dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\theta)(\mu+i\gamma)}\right]A \\ \dfrac{\lambda\mu+\mu\theta-\mu k_1(\theta)+\lambda k_1(\theta)+\theta k_1(\theta)-k_1^2(\theta)-\lambda\mu}{\lambda+\theta-k_1(\theta)}c_1(\theta) + \\ + \dfrac{\lambda\mu+\mu\theta-\mu k_1(\theta)+\lambda k_1(\theta)+\theta k_2(\theta)-k_2^2(\theta)-\lambda\mu}{\lambda+\theta-k_1(\theta)}c_2(\theta) = \dfrac{\mu+i\gamma}{\lambda+\theta-i\gamma} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)+\mu(\mu+\theta)}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}c_1(\theta)+\dfrac{(\lambda+\mu+\theta)k_2(\theta)+\mu(\mu+\theta)}{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}c_2(\theta)=\dfrac{1}{\lambda+\theta-i\gamma}+ \\ +\dfrac{(\lambda+\mu+\theta)i\gamma+\mu(\mu+\theta)}{(\lambda+\mu+\theta)(\mu+i\gamma)}\cdot A \\ \dfrac{k_1^2(\theta)-(\lambda-\mu+\theta)k_1(\theta)-\mu\theta}{\lambda+\theta-k_1(\theta)}c_1(\theta)-\dfrac{k_2^2(\theta)-(\lambda-\mu+\theta)k_2(\theta)-\mu\theta}{\lambda+\theta-k_2(\theta)}c_2(\theta)=0. \end{cases}$$

Коэффициенты и правая часть во втором уравнении нули. Тогда

$$c_1(\theta)=\frac{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}{(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)+\mu(\mu+\theta)}\cdot\frac{1}{\lambda+\theta-i\gamma}+$$
$$+\frac{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}{(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)+\mu(\mu+\theta)}\cdot\frac{(\lambda+\mu+\theta)i\gamma+\mu(\mu+\theta)}{(\lambda+\mu+\theta)(\mu+i\gamma)}\cdot A$$

Наконец, получили, что

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\gamma|z)=\left[\frac{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}{(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)+\mu(\mu+\theta)}\cdot\frac{1}{\lambda+\theta-i\gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda+\mu+\theta)[\mu+k_1(\theta)]}{(\lambda+\mu+\theta)k_1(\theta)+\mu(\mu+\theta)}\cdot\frac{(\lambda+\mu+\theta)i\gamma+\mu(\mu+\theta)}{(\lambda+\mu+\theta)(\mu+i\gamma)}\cdot A\right]e^{k_1(\theta)z}-Ae^{i\gamma z}$$

4. Выводы. Получено преобразование Лапласа по времени, преобразование Фурье- Стильтьеса по фазе условного распределения процесса $X(t)$.

Полученный результат можно использовать в теории управления запасами, в системе с задалживанием спроса, для нахождения математического ожидания и дисперсии запаса в складе.

Литература

1. Lotov V.I. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. The Annals of Probab. 1996, №4, pp.2154-2171
2. Япар Дж.,Насирова Т.И., Ханиев Т.А. О вероятностных характеристиках уровня запаса в модели типа (s.S) // Кибернетика и системный анализ. 1998, №5, с. 69-76
3. Ибаев Э.А. Преобразование Лапласа эргодического распределения процесса полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками и задерживающим экраном в нуле. Известия АН.Азр, серия физ-тех. И мат. Наук. Информатика и проблемы управления, т 25, №3, 2005, с. 189-192.
4. Бусаров В.А. Об асимптотическом поведение случайных блужданий в случайной среде с задерживающим экраном. Вест. МГУ. Сер 1.2004, №5, 61-63 Библ.2 Рус.

UOT 515.21

Y.S. Tunç, E.A. İbayev, Ş.A. Baxşıyev. Müsbət axınlı, mənfi sıçrayışlı semi-Markov dolaşma prosesinin paylanmasının tədqiqi.

Bu məqalədə müsbət axınlı, mənfi sıçrayışlı semi-markov dolaşma prosesi tədqiq olunmuşdur. Prosesin paylanmasının zamana görə Laplas, fazaya görə Furye-Stiltyes çevirməsinin aşkar düsturu tapılmışdır.

Açar sözlər: təsadüfi kəmıyyətlər, semi-Markov dolaşma prosesi, Laplas-Stiltyes çevirməsi

Y.S. Tunç, E.A. Ibayev, Sh. B. Bakhshiyev. Study on the distribution of the semi-Markov random walk process with positive drift and negative jumps.

A semi-Markov random walk process with positive drift and negative jumps is investigated. The evident form of Laplace time transform, Fourier-Stieltjes phase transformation of conditional distribution are obtained.
Keywords: random variables, process of semi-Markov random walk, Fourier-Stieltjes transformation

Институт кибернетики НАНА Представлено 11.07.13