

УДК 519.7

С.З. КУЛИЕВ

ЗОНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Исследуется задача синтеза оптимального управления объектами, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при различных видах обратной связи и на различных классах зональных управляющих функций при неточно заданной информации о значениях параметров объекта. Получены формулы для градиента целевого функционала, которые позволяют для численного определения значений параметров синтезируемых управлений использовать эффективные методы конечномерной оптимизации первого порядка. Приводятся результаты проведенных численных экспериментов на примере решения модельных задач.

Ключевые слова: нелинейная обратная связь, зональное управление, градиент функционала, сопряженная система, дискретные наблюдения, непрерывные наблюдения

1. Введение. Задачи синтеза управления в рамках систем автоматического управления и регулирования исследовались многими авторами [1; 2; 3, с.458-514; 4, с.279-319, 401-414; 5; 6, с.231-239; 7, с.51-55; 8, с.139-148, 189-204; 9, с.136-165, 191-206]. Интерес к этому классу задач возрос за последние десятилетия в связи с развитием технических, вычислительных и измерительных средств контроля и управления техническими объектами и технологическими процессами. В основном рассматривались случаи линейных систем, а в случае нелинейных систем использовались соответствующие линеаризованные системы.

В данной работе исследуются задачи синтеза управления, в общем случае, нелинейными объектами с сосредоточенными параметрами на специальных классах управляющих воздействий. Для синтезируемых управлений введено понятие зональности, что означает постоянство значений синтезируемых параметров управления в каждом из подмножеств (зон), на которые заранее разбито множество всевозможных значений вектора наблюдений за состоянием исследуемого объекта. Значения управляющих воздействий определяются также видом обратной связи и классом функциональной зависимости управления от значения вектора наблюдений за текущим состоянием объекта. Рассмотрены случаи нелинейных дискретной и непрерывной обратной связи, для каждой из которых рассмотрена кусочно-постоянная и линейная функциональная зависимость управляющего воздействия от вектора наблюдений за состоянием объекта. Для каждого исследуемого класса управляющих воздействий получены формулы для градиента целевого функционала по оптимизируемым параметрам синтезируемых управлений. Эти формулы могут быть использованы для формулирования необходимых условий оптимальности и построения численных схем определения параметров на основе итерационных методов оптимизации первого порядка. В работе приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовых задач.

Отметим, что данная работа обобщает результаты работы [16] на случай, когда наблюдаемым является не непосредственно весь фазовый вектор, причем наблюдаемая вектор-функция в общем случае является нелинейной от фазового вектора состояния.

2. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается следующей нелинейной системой автономных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x^0 \in X^0 \subset R^n, \quad p \in P \subset R^q, \quad (2.2)$$

где $x(t)$ - n -мерная вектор-функция состояния процесса; $u(t) \in U$ - r -мерная вектор-функция управления; $U \subset R^r$ - замкнутое множество допустимых значений управляющих воздействий; p - q -мерный вектор постоянных параметров процесса, точные значения которых не известны, но задано множество их возможных значений P и функция плотности (веса) $\rho_p(p) \geq 0$, определенная на P ; X^0 - множество возможных значений начальных состояний процесса с заданной функцией плотности (веса) $\rho_{x^0}(x^0) \geq 0$; n -мерная вектор-функция $f(x, u, p)$ непрерывно-дифференцируема по первым двум аргументам и непрерывна по третьему аргументу.

Обозначим через $X \subset R^n$ множество всевозможных состояний, которые может принимать объект при различных допустимых начальных состояниях $x^0 \in X^0$, значений параметров $p \in P$ и управлений $u(t) \in U$ при $t \in [0, \bar{T}]$. Как правило, для многих процессов, исходя из опыта, результатов исследования их функционирования, множество возможных состояний процесса X бывает известным.

Предположим, что за состоянием объекта $x(t)$ ведется не непосредственное, а косвенное наблюдение, которое задается вектором наблюдений

$$y(t) = G(x(t)), \quad y \in R^m, \quad (2.3)$$

где $G(x)$ - m -мерная, непрерывно-дифференцируемая, по каждой переменной строго монотонная на множестве X вектор-функция.

Управление процессом (2.1) осуществляется с учетом наличия обратной связи с объектом. При этом сам процесс предполагается управляемым и наблюдаемым [3, с.76-137, 397-428; 6, с.185-214; 7, с.45-60]. Наблюдения за вектором $y(t)$ могут проводиться в дискретные моменты времени или непрерывно. Для управления процессом предлагается значения синтезируемых управляющих воздействий выбирать в зависимости от того, какому подмножеству (зоне), на которые заранее разбито множество всевозможных значений вектора наблюдений за состоянием объекта, принадлежит замеренное текущее состояние процесса.

Рассматриваемая задача синтеза состоит в определении значений параметров зональных управляющих воздействий $u(t) = u(y(t))$, минимизирующих следующий функционал

$$J(u) = \frac{1}{mesX^0 \cdot mesP} \int \int_{X^0 P} \left[\int_0^T g(x(t), u(t)) dt + \Phi(x(T), T) \right] \cdot \rho_{x^0}(x^0) \cdot \rho_p(p) dP dX^0 \quad (2.4)$$

Здесь $x(t) = x(t; x^0, p, u)$ - решение системы (2.1) при допустимом управлении $u(t)$, начальном состоянии x^0 и значениях параметров процесса p ; функции $g(x, u)$ и $\Phi(x, T)$ непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам. Время завершения T процесса может быть как заданной фиксированной величиной: $T = const = \bar{T}$, так и оптимизируемой величиной для каждой пары (x^0, p) значений начального состояния и параметров объекта:

$$T = T(x^0, u, p) \leq \bar{T}, \quad x^0 \in X^0, \quad p \in P,$$

где \bar{T} - заданная величина. Второй случай, как правило, возникает в задачах быстрогодействия систем регулирования, т.е. наискорейшего приведения текущего состояния в заранее заданное исходное состояние. Нами будут рассмотрены оба случая. Функционал (2.4) определяет качество управления оптимального в среднем по допустимым значениям $x^0 \in X^0$ и $p \in P$.

Пусть $Y = \{y \in R^m : y = G(x), x \in X\}$ – множество значений вектора наблюдений $y(t)$ за состоянием объекта для всевозможных допустимых начальных состояний, значений параметров объекта и управлений. Пусть множество Y разбито на заданное число L открытых подмножеств (зон) Y^i , $i = 1, 2, \dots, L$, таких, что

$$Y = \bigcup_{i=1}^L \bar{Y}^i \subseteq R^m, Y^j \cap Y^i = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, L, \quad (2.5)$$

где \bar{Y}^i – замыкание множества Y^i , а границы между подмножествами Y^i и Y^j , $i, j = 1, 2, \dots, L, i \neq j$, определяются известными непрерывными, почти всюду дифференцируемыми функциями $h_{ij}(y) = h_{ji}(y) = 0$.

В работе рассмотрены следующие четыре варианта задачи синтеза управления $u(t) = u(y(t))$, различающиеся организацией обратной связи с объектом и формированием значений управляющих воздействий.

Задача 1. Заданы моменты времени $\tau_j \in [0, \bar{T}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, $\tau_0 = 0$, в которых возможно замерить значение вектора наблюдений за текущим состоянием объекта $y(\tau_j) = G(x(\tau_j)) \in Y$. Частота этих наблюдений должна быть такова, что пока состояние объекта принадлежит какой-либо зоне, проводится по меньшей мере одно наблюдение. При невыполнении этого условия зоне, через которую не проходила траектория $y(t)$ ни из одной начальной точки или при прохождении через эту зону не проводилось ни одного замера состояния, не будут назначены значения параметров зональных управлений. Постоянные при $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ значения управления $u(t)$ определяются в зависимости от последнего замеренного значения вектора наблюдений за текущим состоянием объекта, а именно, в зависимости от того, какому подмножеству (зоне) Y^i , $i = 1, 2, \dots, L$, пространства Y принадлежало последнее измеренное (наблюденное) состояние. Каждому подмножеству Y^i соответствует свое постоянное значение управления:

$$u(t) = v^i = const, y(\tau_j) = G(x(\tau_j)) \in Y^i, t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad (2.6)$$

$$v^i \in U \subset R^r, i = 1, 2, \dots, L, j = 0, 1, \dots, N-1, \tau_N = \bar{T}.$$

В случае, если наблюдаемое значение состояния $y(\tau_j)$ принадлежит границе каких-либо зон, то используется значение зонального управления той смежной зоны, в которую перешла траектория. Требуется определить зональные значения управления v^i , $i = 1, 2, \dots, L$, оптимизирующие функционал (2.4).

Задача 2. Управляющие воздействия определяются линейными функциями от результатов наблюдения параметров состояния в заданные дискретные моменты времени $\tau_j \in [0, \bar{T}]$, $j = 0, 1, \dots, N$:

$$u(t) = K_1^i \cdot y(\tau_j) + K_2^i, t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), y(\tau_j) = G(x(\tau_j)) \in Y^i, t \in [0, \bar{T}], \quad (2.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, L, j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Здесь K_1^i – матрица размерности $r \times m$ и K_2^i – r -мерный вектор – постоянны при $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$.

Задача заключается в определении зональных значений K_1^i , K_2^i , $i = 1, 2, \dots, L$, определяющих параметры синтезируемого управляющего воздействия и оптимизирующие функционал (2.4).

Задача 3. Проводятся непрерывные замеры вектора наблюдений за состоянием объекта, а управляющие воздействия принимают зональные значения управления:

$$u(t) = w^i = \text{const}, \quad y(t) = G(x(t)) \in Y^i, \quad t \in [0, \bar{T}], \quad (2.8)$$

$$w^i \in U \subset R^r, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Требуется определить зональные значения управления $w^i, i = 1, 2, \dots, L$, оптимизирующие функционал (2.4).

Задача 4. Проводятся непрерывные замеры вектора наблюдений за состоянием объекта. Управляющие воздействия определяются линейной функцией от измеренных текущих значений параметров состояния:

$$u(t) = K_1^i \cdot y(t) + K_2^i, \quad y(t) = G(x(t)) \in Y^i, \quad t \in [0, \bar{T}], \quad (2.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, L, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1,$$

Здесь K_1^i - матрица размерности $r \times m$ и K_2^i - r -мерный вектор - постоянны для каждой зоны Y^i , т.е. пока $y(t) \in Y^i$. Требуется определить значения $K_1^i, K_2^i, i = 1, 2, \dots, L$, оптимизирующие функционал (2.4).

Отметим, что во всех четырех задачах синтезируемые управления определяются конечномерными постоянными векторами и матрицами.

3. Решение задач 1-4. Для решения поставленных задач оптимизации с целью определения управляющих воздействий $u(t), t \in [0, \bar{T}]$, из классов (2.6)-(2.9) предлагается применять численные методы оптимизации первого порядка и соответствующее стандартное программное обеспечение [10, с.258-283; 11, с.63-86; 12, с.234-300]. Как известно, для организации итеративных процедур методов первого порядка необходимо получить формулы градиента целевого функционала.

Используя технику приращения целевого функционала, получаемого за счет приращения оптимизируемых аргументов [12, с.53-57], а также результаты относительно управления разрывными системами [13; 14; 15], можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Компоненты градиента целевого функционала на классе управлений (2.6) определяются по формулам:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial v^i} = \iint_{X^0 P} \int_{\Pi_i(x^0, p, u)} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right] dt \cdot$$

$$\cdot \rho_{x^0}(x^0) \cdot \rho_p(p) dP dX^0 / (\text{mes} X^0 \cdot \text{mes} P),$$

где $\Pi_i(x^0, p, u) = \bigcup_{j: G(x(\tau_j; x^0, p, u)) \in Y^i} [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, L$; функция $\psi(t; x^0, p, u), t \in [0, \bar{T}]$, является решением следующей сопряженной задачи Коши:

$$\psi(\bar{T}; x^0, p, u) = - \frac{\partial \Phi(x(\bar{T}; x^0, p, u), \bar{T})}{\partial x},$$

$$\dot{\psi}^T(t; x^0, p, u) = \frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial x} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial x}.$$

Теорема 2. Компоненты градиента целевого функционала на классе управлений (2.7) определяются по формулам:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial K_1^i} = \iint_{X^0 P} \sum_{j: G(x(\tau_j; x^0, p, u)) \in Y^i} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right]^T$$

$$dt \cdot G(x(\tau_j; x^0, p, u)) \cdot \rho_p(p) \cdot \rho_{x^0}(x_0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P),$$

$$\frac{\partial J(u)}{\partial K_2^i} = \iint_{X^0 P} \sum_{j: G(x(\tau_j; x^0, p, u)) \in Y^i} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right]^T \text{ где}$$

$$dt \cdot \rho_p(p) \cdot \rho_{x^0}(x_0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P),$$

$i = 1, 2, \dots, L$; $\psi(t; x^0, p, u)$, $t \in [0, \bar{T}]$, – решение следующей сопряженной задачи Коши:

$$\psi(\bar{T}; x^0, p, u) = - \frac{\partial \Phi(x(\bar{T}; x^0, p, u), \bar{T})}{\partial x},$$

$$\dot{\psi}^T(t; x^0, p, u) = \frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial x} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[\frac{\partial g(x(\tau; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(\tau; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(\tau; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right] d\tau \cdot K_1^j \cdot$$

$$\cdot G(x(\tau_j; x^0, p, u)) \cdot \delta(t - \tau_j).$$

Теорема 3. Компоненты градиента целевого функционала на классе управлений (2.8) определяются по формулам:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial w^i} = \iint_{X^0 P} \int_{\Pi_i(x^0, p, u)} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right] dt \cdot$$

$$\cdot \rho_p(p) \rho_{x^0}(x^0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P),$$

где $\Pi_i(x^0, p, u) = \{t \in [0, T]: G(x(t; x^0, p, u)) \in Y^i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, L\}$; $\psi(t; x^0, p, u)$, $t \in [0, \bar{T}]$, – решение следующей сопряженной задачи:

$$\psi(\bar{T}; x^0, p, u) = - \frac{\partial \Phi(x(\bar{T}; x^0, p, u), \bar{T})}{\partial x},$$

$$\dot{\psi}^T(t; x^0, p, u) = \frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial x} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial x},$$

удовлетворяющая следующему условию скачка на границе раздела зон:

$$\psi^T(t_{l,i}^-; x^0, p, u) = \psi^T(t_{l,i}^+; x^0, p, u) - \frac{\partial h_{l,i}(y(t_{l,i}))}{\partial G} \cdot \frac{\partial G(x(t_{l,i}; x^0, p, u))}{\partial x} \cdot \sigma_{l,i},$$

$$\sigma_{l,i} = \frac{\psi^T(t_{l,i}^+; x^0, p, u) \cdot [f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), w^l, p) - f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), w^i, p)]}{\frac{\partial h_{l,i}(y(t_{l,i}))}{\partial G} \cdot \frac{\partial G(x(t_{l,i}; x^0, p, u))}{\partial x} \cdot f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), w^l, p)}.$$

Здесь $t_{l,i}$ – момент времени, когда значение вектора наблюдений (2.3) при переходе из зоны Y^l в зону Y^i попадает на их границу, $l, i \in \{1, 2, \dots, L\}$.

Теорема 4. Компоненты градиента целевого функционала на классе управлений (2.9) определяются по формулам:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial K_1^i} = \iint_{x^0 P} \int_{\Pi_i(x^0, p, u)} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right]^T \cdot G(x(t; x^0, p, u)) dt \cdot \rho_p(p) \cdot \rho_{x^0}(x^0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P),$$

$$\frac{\partial J(u)}{\partial K_2^i} = \iint_{x^0 P} \int_{\Pi_i(x^0, p, u)} \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right]^T dt \cdot \rho_p(p) \cdot \rho_{x^0}(x^0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P),$$

где $\Pi_i(x^0, p, u) = \{t \in [0, T] : G(x(t; x^0, p, u)) \in Y^i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, L\}$; $\psi(t; x^0, p, u)$, $t \in [0, \bar{T}]$, – решение следующей сопряженной задачи Коши:

$$\psi(\bar{T}; x^0, p, u) = - \frac{\partial \Phi(x(\bar{T}; x^0, p, u), \bar{T})}{\partial x},$$

$$\dot{\psi}^T(t; x^0, p, u) = \frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial x} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial x} +$$

$$+ \left[\frac{\partial g(x(t; x^0, p, u), u)}{\partial u} - \psi^T(t; x^0, p, u) \cdot \frac{\partial f(x(t; x^0, p, u), u, p)}{\partial u} \right] \cdot K_1^i \cdot \frac{\partial G(x(t))}{\partial x}, \quad \text{при}$$

$G(x(t; x^0, p, u)) \in Y^i$, удовлетворяющая следующему условию скачка на границе раздела зон:

$$\psi^T(t_{l,i}^-; x^0, p, u) = \psi^T(t_{l,i}^+; x^0, p, u) - \frac{\partial h_{l,i}(y(t_{l,i}))}{\partial G} \cdot \frac{\partial G(x(t_{l,i}; x^0, p, u))}{\partial x} \cdot \sigma_{l,i},$$

$$\sigma_{l,i} = \frac{\psi^T(t_{l,i}^+; x^0, p, u) \cdot [f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), K^l, p) - f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), K^i, p)]}{\frac{\partial h_{l,i}(y(t_{l,i}))}{\partial G} \cdot \frac{\partial G(x(t_{l,i}; x^0, p, u))}{\partial x} \cdot f(x(t_{l,i}; x^0, p, u), K^l, p)}.$$

Здесь $t_{l,i}$ – момент времени, когда значение вектора наблюдений (2.3) при переходе из зоны Y^l в зону Y^i попадает на их границу, $l, i \in \{1, 2, \dots, L\}$.

Теорема 5. Для классов синтезирующих управлений (2.6)-(2.9) в случае, если время завершения процесса $T = T(x^0, u, p)$ оптимизируется, то производная функционала (2.4) по времени определяется формулой

$$\frac{\partial J(u)}{\partial T} = \iint_{x^0 P} \left[\frac{\partial \Phi(x(T; x^0, p, u), T)}{\partial T} + g(x(T; x^0, p, u), u(T)) - \psi^T(T; x^0, p, u) \cdot f(x(T; x^0, p, u), u(T), p) \right] \cdot \rho_p(p) \cdot \rho_{x^0}(x^0) dP dX^0 / (mes X^0 \cdot mes P)$$

где $\psi(t; x^0, p, u)$ – решение сопряженной задачи, соответствующей случаю рассматриваемого класса синтезирующих управлений.

Отметим, что для доказательства теорем 3 и 4 используется техника получения необходимых условий оптимальности первого порядка для разрывных систем [13; 14; 15], а для доказательства теорем 1 и 2 используется техника получения необходимых условий оптимальности первого порядка на классе кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций [16; 17]. Для доказательства теоремы 5

можно использовать, например, схему, применённую в работе [18, с.91-110, 240-248] для задач с нефиксированной величиной времени завершения процесса управления.

На качество системы управления объектом с применением зональных управляющих воздействий существенно влияет структура разбиения всего множества Y на зоны $Y^i, i = 1, 2, \dots, L$. Ясно, что увеличение числа зон за счет их измельчения может приводить разве что к уменьшению значения функционала. С другой стороны увеличение числа зон приводит к тому, что управляющие воздействия могут чаще во времени менять свои значения и, следовательно, с одной стороны ухудшается свойство робастности системы управления, а с другой стороны это приводит к быстрому износу и выходу из строя исполнительных механизмов. И наоборот, увеличение объемов зон, т.е. уменьшение их числа, с одной стороны ухудшает свойство управляемости объекта, а при каком-то малом их числе объект может стать вообще не управляемым. С другой стороны при этом увеличивается значение целевого функционала, т.е. ухудшается качество управления.

Учитывая сказанное, важную роль играет выбор как количества, так и конкретно самих зон $Y^i, i = 1, 2, \dots, L$. Рекомендуется следующий подход к выбору рационального количества зон и определения самих зон $Y^i, i = 1, 2, \dots, L$. С этой целью выбирается начальное значение L и назначаются какие-либо зоны $Y^i, i = 1, 2, \dots, L$, удовлетворяющие условиям (2.5). Решив задачу синтеза управляющих воздействий для какой-либо стратегии организации управления, проводится сравнительный анализ полученных значений параметров управляющих воздействий по всем соседним зонам. В случае, если параметры управляющих воздействий в каких-либо смежных зонах различаются на достаточно малую величину, то эти зоны можно объединить в одну, уменьшив число L . В случае же, если управляющие воздействия в смежных зонах существенно различаются, то следует разбить каждую из этих смежных зон, например, на две зоны, т.е. увеличить число L , и снова решить задачу синтеза параметров управляющих воздействий. Увеличение количества зон следует производить до тех пор, пока значение целевого функционала не перестанет существенно меняться.

4. Результаты численных экспериментов. Применим полученные формулы к построению рассмотренных вариантов синтезированных управлений на примере управления процессом, описываемого следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\sin x_1(t) - p \cdot x_2(t) + u(t), \quad t > 0,$$

где $u \in U = [-1, 1]$. Размерности рассматриваемых векторов следующие: $n = 2, r = 1, q = 1$, т.е. $x = (x_1, x_2) \in R^2, u \in U \subset R$ и $p \in P \subset R$.

За состоянием объекта $x(t)$ ведется косвенное наблюдение, которое задается следующей функцией:

$$y(t) = G(x(t)) = G(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t) + x_2(t), \quad y(t) \in R.$$

Из вида функции $G(x(t))$ видно, что она удовлетворяет как условию непрерывной-дифференцируемости, так и условию строгой монотонности по каждой отдельно взятой переменной.

Пусть множество P состоит из 3-х равновероятных значений $P = \{0.9, 1.0, 1.1\}$, а множество X^0 состоит из 80 дискретных точек $x_j^0 \in R^2, j = 1, 2, \dots, 80$, равномерно распределенных на окружности радиуса 2, а функции

$$g(x, u) = 1, \quad \Phi(x(T; x^0, p, u), T) = R \cdot [\min(x_1^2(T; x^0, p, u) + x_2^2(T; x^0, p, u) - 0.0001; 0)]^2,$$

где R - достаточно большое положительное число. Тогда целевой функционал (2.4) для рассматриваемой задачи будет иметь следующий вид:

$$J(u, T) = \frac{1}{240} \sum_{j=1}^{80} \sum_{i=1}^3 \{T(x_j^0, u, p_i) + \Phi(x(T; x_j^0, p_i, u))\} \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (4.1)$$

Здесь функция $T(x^0, u, p)$ определяет время приведения объекта из точки $x^0 \in X^0$ в заданную окрестность начала координат при $p \in P$ и $u \in U$.

Ниже приведем численные результаты решения задачи, когда множество всевозможных значений функции $y(t)$ было разбито на $L = 82$ зоны. Зоны получаются разбиением множества R точками $\{y_i = -4 + i \cdot 0.1, i = 0, 1, 2, \dots, 80\}$ и пронумерованы слева направо. Для минимизации функционала (4.1) использовался метод проекции сопряженного градиента [12, с.249-258]. Начальные значения управления во всех зонах были взяты равными 0. Значение параметра R последовательно увеличивалось от 10^2 до 10^5 . Значения параметров оптимизации были выбраны следующими: точность по функционалу для одномерной минимизации $\delta = 10^{-5}$, для многомерной минимизации $\varepsilon = 10^{-4}$. Для решения задач Коши относительно системы (2.1) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$. Параметр τ в задачах 1 и 2 при проведении численных экспериментов варьировался. Результаты решения всех четырех рассмотренных выше задач приведены на рис. 1 и в табл. 1.

Задача 1. В каждой зоне управление $u(t)$ принимает постоянное значение. Таким образом, оптимизируемыми в задаче являются постоянные векторы $v = (v^1, v^2, \dots, v^{82})$ и $T = (T_1, T_2, \dots, T_{80})$. Наблюдения за значением функции $y(t)$ проводятся в заранее заданные моменты времени $\tau_i = \tau_{i-1} + \tau, i = 1, 2, \dots, \tau = const$. Полученные при $\tau = 0.2$ и $\tau = 0.1$ оптимальные значения времен попадания траекторий в круг радиуса 0.01 приведены во 2-ой и 4-ой колонках табл. 1. На рис.1,а приведены оптимальные траектории системы.

Задача 2. В каждой зоне управление $u(t)$ линейно зависит от значения функции $y(t)$ в последний замеренный момент времени. Оптимизируемыми в задаче являются постоянные векторы $K_1 = (K_1^1, K_1^2, \dots, K_1^{82})$, $K_2 = (K_2^1, K_2^2, \dots, K_2^{82})$ и $T = (T_1, T_2, \dots, T_{80})$. За значением функции $y(t)$ проводились наблюдения в моменты времени $\tau_i = \tau_{i-1} + \tau, i = 1, 2, \dots, \tau = const$. Полученные при $\tau = 0.2$ и $\tau = 0.1$ оптимальные значения времен попадания траекторий в круг радиуса 0.01 приведены в 3-ей и 5-ой колонках табл. 1. На рис.1,б приведены оптимальные траектории системы.

Задача 3. В каждой зоне управление $u(t)$ принимает постоянное значение. Таким образом, оптимизируемыми в задаче являются векторы $w = (w^1, w^2, \dots, w^{82})$ и $T = (T_1, T_2, \dots, T_{80})$. За значением функции $y(t)$ проводились непрерывные наблюдения. Полученные оптимальные значения времен попадания траекторий в круг радиуса 0.01 приведены в 6-ой колонке табл. 1. На рис.1,в показаны оптимальные траектории системы.

Задача 4. В каждой зоне управление $u(t)$ линейно зависит от значения функции $y(t)$ в текущий момент времени. Оптимизируемыми в задаче являются постоянные векторы $K_1 = (K_1^1, K_1^2, \dots, K_1^{82})$, $K_2 = (K_2^1, K_2^2, \dots, K_2^{82})$ и $T = (T_1, T_2, \dots, T_{80})$. За значением функции $y(t)$ проводились непрерывные наблюдения. Полученные оптимальные значения времен попадания траекторий в круг радиуса 0.01 приведены в 7-ой колонке табл. 1. На рис.1,г показаны оптимальные траектории системы.

5. Выводы. В работе получены формулы для градиента целевого функционала в задаче синтеза зонального оптимального управления объектом, описываемым системой с сосредоточенными параметрами, на различных классах синтезирующих функций при неточной информации о значениях

параметров объекта. Полученные формулы позволили применить конечномерные методы оптимизации первого порядка для численного решения рассматриваемых задач. Принимая во внимание простоту технической реализации управляющих воздействий, предложенный подход к решению задачи синтеза оптимального управления может найти широкое применение в автоматизированных системах, в автоматическом управлении в системах регулирования при наличии неточной информации о значениях параметров объекта.

Оптимальные значения зональных параметров управляющих воздействий и сами значения воздействий зависят от способа организации обратной связи. Отметим, что величина шага дискретизации времен наблюдения, использованная в экспериментальных расчетах, влияет на оптимальные значения параметров зональных управляющих воздействий и на значения времени приведения системы в заданную окрестность начала координат. Проведенные численные эксперименты показали, как и следовало ожидать, что наилучшие результаты получаются при непрерывном слежении за вектором наблюдения за состоянием объекта и линейной функциональной зависимости управления от этого вектора.

Выбор рациональной организации наблюдения, вида управления, количества зон и самих зон для каждого конкретного случая должен производиться на основании предложенных выше схем расчетов и анализа полученных результатов численных экспериментов с учетом характера самого объекта.

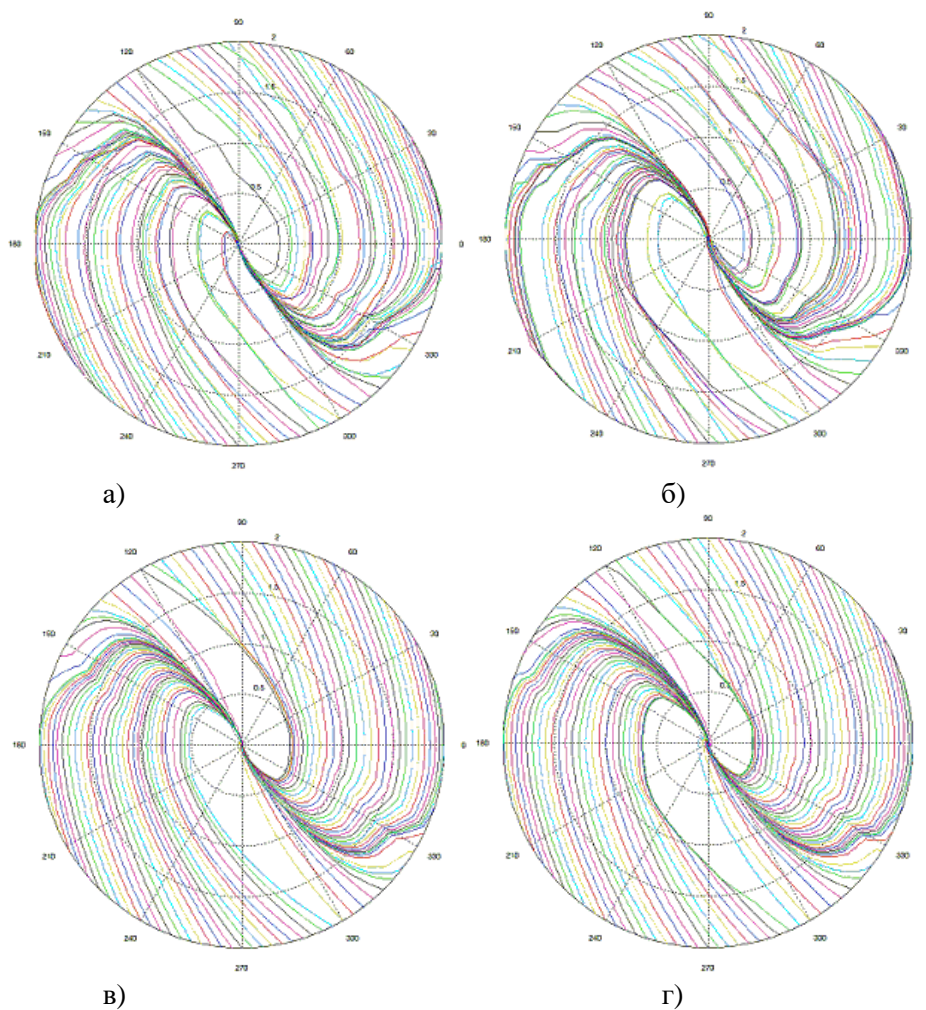


Рис. 1. Оптимальные траектории системы в задачах 1-4.

Табл. 1. Оптимальные времена завершения и значения функционала.

Задача	$\tau = 0.2$		$\tau = 0.1$		3	4
	1	2	1	2		
Траектория						
1	4.2622	3.8031	4.0042	3.8036	4.0419	3.7106
2	3.8709	5.0710	3.5315	3.3962	3.4638	3.2652
3	4.8436	4.2018	4.3067	4.1038	4.3325	4.0180
4	3.8548	4.0540	3.2567	3.1690	3.1989	2.9925
5	4.8857	4.1884	4.5673	4.1846	4.3960	4.0921
6	3.1372	3.1185	3.0000	3.1943	3.0263	2.8515
7	4.8076	4.1796	4.5000	4.2116	4.4263	4.1270
8	3.0769	2.6247	2.8926	2.7739	2.9174	2.7313
9	4.9657	4.1572	4.5326	4.2142	4.4277	4.1327
10	2.8846	3.3876	2.7590	2.6968	2.8224	2.6107
11	4.8749	4.4449	4.6000	4.1790	4.4395	4.1328
12	2.6028	2.4712	2.5977	2.5514	2.7240	2.6873
13	4.8484	4.3811	4.5248	4.1782	4.4214	4.1273
14	3.0927	3.1185	3.0549	2.8758	2.6125	2.4052
15	4.8401	4.4467	4.4819	4.1982	4.4035	4.1182
16	2.4000	5.4016	2.4096	5.0131	2.3815	2.4439
17	4.8793	4.1673	4.5029	4.1751	4.3717	4.0946
18	2.4793	5.1728	2.6369	4.8407	2.6334	3.3820
19	4.9165	4.1729	4.4326	4.1742	4.3430	4.0780
20	4.5081	5.3169	4.1899	4.8463	4.7736	4.5325
21	4.8978	4.1677	4.3444	4.1684	4.3252	4.0548
22	4.0431	5.8944	4.8756	4.7752	4.4927	4.4354
23	4.6521	4.1460	4.4378	4.1594	4.3012	4.0268
24	4.0616	4.9917	4.1731	4.6525	4.3747	4.1881
25	4.5045	4.1256	4.3859	4.1332	4.2764	3.9971
26	4.8904	5.3169	4.1810	4.5448	4.2694	4.1024
27	4.6099	4.3527	4.3269	4.0853	4.2700	3.9782
28	4.8610	4.9261	4.5454	4.4871	4.1032	4.0209
29	4.8716	4.1203	4.3269	3.9905	4.2488	3.9640
30	4.8580	4.9079	4.8892	4.4642	3.9281	3.9467
31	4.8465	4.1125	4.2507	4.0001	4.2563	3.9575
32	4.8799	4.3237	4.2682	4.4750	3.8908	3.9161
33	4.8714	4.0245	4.2682	3.9833	4.2582	3.9522
34	4.8782	4.3238	4.1899	4.4023	3.8804	3.9088
35	4.8639	4.4624	4.3253	3.9925	4.2685	4.1018
36	4.8633	4.1672	4.1774	4.3078	3.8873	3.9187
37	4.3929	4.2660	4.3689	3.9761	4.2768	4.2052
38	4.9075	4.9301	4.2338	4.3742	3.9030	3.9526
39	4.8543	4.6184	4.4379	4.0373	4.2867	4.1906

40	4.8448	4.7619	4.1756	4.2995	3.9263	3.9775
41	4.8780	3.8089	4.2288	4.0420	4.2945	4.2044
42	4.9019	4.5454	4.1357	4.3206	3.9504	4.0147
43	4.1237	4.2920	4.2452	3.9893	4.2888	4.2721
44	4.8746	4.5777	4.1232	4.2761	3.9653	4.0282
45	4.2224	4.1917	4.2288	4.0025	4.2879	4.2030
46	4.8607	4.5744	4.1019	4.2590	3.9805	4.0428
47	4.8637	4.8502	4.3478	4.0368	4.2659	4.1653
48	4.8686	4.5434	4.1532	4.2111	3.9856	4.0528

Продолжение Табл. 1.

Задача	$\tau = 0.2$		$\tau = 0.1$		3	4
	1	2	1	2		
Траектория						
49	4.8748	4.4368	4.6277	4.0132	4.2560	4.1760
50	4.5421	4.1771	4.0948	4.2006	3.9887	4.0680
51	4.8541	4.5751	4.4149	3.9117	4.2517	4.2566
52	4.6066	4.3713	4.1738	4.1634	3.9870	4.0878
53	4.8908	4.4635	4.5801	4.0050	4.1850	4.3274
54	4.8699	4.5271	4.1752	4.1529	3.9873	4.1213
55	4.4642	4.3670	4.5627	4.0364	4.1111	4.3639
56	4.5243	4.5112	4.2270	4.1917	3.9984	4.1075
57	4.8605	5.1385	4.8753	4.0938	4.1082	4.4363
58	4.8541	4.5201	4.2932	4.2699	4.0273	4.1437
59	4.8754	4.7076	4.7295	4.1799	4.2029	4.2815
60	4.8603	4.1930	4.2553	4.3042	4.0566	4.1738
61	4.8632	5.3560	4.5454	4.2655	3.4839	3.9042
62	4.8894	4.3924	4.3243	4.3124	4.0824	4.1972
63	4.8967	4.8690	4.4289	3.7015	2.7004	3.3200
64	4.9106	4.3911	4.5434	4.3038	4.1117	4.2207
65	4.6272	3.1055	3.4079	3.7811	2.4377	3.1454
66	4.9300	4.7447	4.3478	4.3215	4.1340	4.2478
67	2.9723	3.0927	2.6190	2.4747	2.5758	2.6311
68	4.9115	4.7661	4.4186	4.3080	4.1540	4.2702
69	2.6529	2.6639	2.6974	2.6219	2.7144	2.7911
70	4.8134	4.4065	4.4203	4.3189	4.1651	4.2777
71	3.0612	2.6006	2.7932	2.6919	2.8245	2.9048
72	4.9171	4.4014	4.4013	4.3178	4.1723	4.2844
73	4.8801	2.8580	2.8571	2.8399	2.9200	3.0108
74	4.9423	4.4027	4.4127	4.3353	4.1646	4.2814
75	3.0274	3.0612	4.8824	3.0538	3.0475	3.1408
76	4.8578	4.1941	4.4303	4.3218	4.1400	4.2436
77	3.1067	3.0635	3.4193	3.2968	3.2488	3.3211
78	4.8596	4.1912	4.4871	4.2533	4.0693	4.2094
79	3.8539	4.8595	3.4864	3.5161	3.4345	3.5050
80	4.8851	4.4881	3.9325	3.9505	3.8046	3.8861

Функционал	4.4519	4.2762	4.0924	3.9967	3.8768	3.8581
------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф., Костюкова О. Синтез оптимального управления динамическими системами при неточной и неполной информации о состоянии. Математический Институт имени Стеклова РАН, том 211, 1995, стр.140-152.
2. Marc Quincampoix and Vladimir M. Veliov. Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // SIAM Journal on Control and Optimization, 2004, vol.43 (4), pp.1373-1399.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
5. Дмитрук Н.М. Оптимальное робастное управление линейными системами по неточным измерениям выходных сигналов // ПУИИ, Киев, №6, 2011, стр.25-42.
6. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 504 с.
7. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. Москва: Наука, 2002, 303 с.
8. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967, 336 с.
9. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill, 1981, 376 p.
10. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. Москва: Наука, 1982, 432 с.
11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983, 384 с.
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
13. David E. Stewart and Mihai Anitescu. Optimal Control of Systems with Discontinuous Differential Equations // Numerische Mathematik, 2010, vol.114(4), Springer-Verlag, pp.653-695.
14. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Об одном классе обратных задач для разрывных систем // Кибернетика и Системный Анализ, Киев, 2008, №4, стр.142-152.
15. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. О численном решении одного класса обратных задач для разрывных динамических систем // Автоматика и Телемеханика, 2012, №5, стр.25-38.
16. Aida-zade K.R. and Guliyev S.Z. A task for nonlinear system control synthesis // Automatic Control and Computer Sciences, Vol.39 (1), 2005, pp.15-23.
17. Aida-zade K.R. and Handzel A.V. An approach to lumped control synthesis in distributed systems // Applied and Computational Mathematics, vol.6 (1), 2007, pp.69-79.
18. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972, 544 с.

UOT 519.7

S.Z. Quliyev. Qeyri-xətti dinamik sistemin qeyri-xətti əks əlaqə ilə zonal idarəedilməsi.

İşdə qeyri-xətti adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan və obyektin parametrlərinin qiymətlərinin haqqında qeyri dəqiq informasiya ilə müxtəlif sinif zonal idarə olunan funksiyalar sinfində, obyektin optimal idarəetməsinin sintez məsələsi tədqiq olunur. Funksionalın qradiyenti üçün analitik düsturlar alınmışdır ki, bu da sintez olunan idarəetmə parametrlərinin ədədi qiymətlərinin tapılmasında birinci tərtib sonlu ölçülü optimallaşdırmanın effektiv üsullarının istifadə olunmasına imkan verir. Model məsələ nümunəsində aparılan ədədi eksperimentin nəticələri verilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-xətti əks-əlaqə, zonal idarəetmə, funksionalın qradiyenti, qoşma məsələ, diskret müşahidə, kəsilməz müşahidə

S.Z. Guliyev. Zonal control of nonlinear dynamic systems under nonlinear feedback.

We investigate a feedback optimal control problem for objects described by systems of nonlinear ordinary differential equations with different forms of feedback and on different classes of zonal control actions, under uncertain information on the values of the object's parameters. We obtain formulas for the gradient of the target functional, which allow using efficient methods of first order finite-dimensional optimization for numerical determination of the values of the synthesized controls' parameters. We give the results of numerical experiments carried out on some test problems.

Keywords: nonlinear feedback, zonal control, gradient of functional, adjoint system, discrete observations, continuous observations

Институт кибернетики НАНА

Представлено 06.06.13