Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.3, 2014
www.icp.az/2014/3-19.pdf

УДК 51-72

Р.С. ГУЛИЕВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КАК ГИБКОЙ МЕМБРАНЫ, НАТЯНУТОЙ НА ВЫСОТНЫЕ ЛИНИИ, ЗАДАННЫЕ CATMULL-ROM СПЛАЙНОМ

Рассматривается задача численной генерации поверхности рельефа, как гибкая мембрана. Исходными данными для представления контура, служит множество контрольных точек, задающих линии уровня посредством Catmull-Rom сплайна.

Ключевые слова: Catmull-Rom сплайн, линии уровня, поверхность, рельеф

1. Введение. При некоторых разумных предположениях рельеф является поверхностью. С математической точки зрения рельеф можно задать различными способами. Один из способов задания рельефа - это задание его посредством линий уровня.

Хорошо известно, что информационные системы работают с конечным числом данных. Поэтому, несмотря на то, что кривые имеют континиум точек, для обработки в информационных системах они должны быть заданы конечным числом точек. Существуют различные подходы для представления кривых посредством конечных точек. Известны заданные линии уровня такие, как ломаная (например [1]) кубические сплайни (например [2, 3]), Catmull-Rom сплайни (например [4, 5]) и другие. Среди них наиболее популярным является определение кривых, как сплайн по заданным конечным числам точек. Одним из таких сплайнов является сплайн Catmull-Rom [6].

Очевидно, при аппроксимации линий уровня рельефа, Catmull-Rom сплайн является более экономичным с точки зрения количества данных [7]. Поэтому в своих исследованиях мы использовали Catmull-Rom сплайн. При исследовании различных задач, связанных с земной поверхностью, если необходимо узнать высоту в точке, расположенной между этими линиями, то ее определяют различными методами приближения. Цель данной работы - моделирование рельефа, как гибкая мембрана, натянутая на контур, образованный замыканием линий уровня. Для решения поставленной задачи рельеф будет генерирован численными методами как поверхность, натянутая на контур, определённый линиями уровня.

Отметим, что в работе [8] предложена генерация поверхности рельефа как мыльная пленка. В этой работе для построения модели мыльной пленки решается уравнение Лапласа в соответствующей области.

2. Математическая постановка задачи. Пусть O некоторая заданная точка на земной поверхности, ось Oz направлена вверх вдоль нормали земной поверхности. Направим оси Ox и Oy так, чтобы система координат Oxyz образовала систему координат левой ориентации.

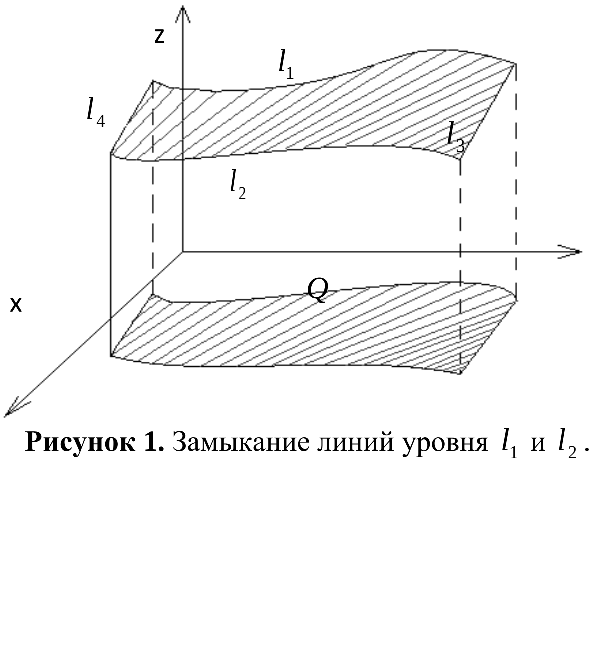

Рисунок 1. Замыкание линий уровня l_1 и l_2.

Пусть, в этой системе координат заданы линии уровня l_1 и l_2 соответствующие высотам h_1 и h_2 (рис. 1). Замыкая эти линии уровня с некоторыми отрезками l_3 и l_4, получим замкнутый контур $\Gamma = l_1 l_2 l_3 l_4$.

Обозначим через γ проекцию контура Γ на плоскость Oxy, а область ограниченную контуром γ через Q. Из курса математической физики известно, что состояние гибкой мембраны, натянутой на заданный контур, описывается уравнением Лапласа. Таким образом, задача генерации рельефа приводится к определению области Q на основе заданных контрольных точек Catmull-Rom сплайна, с последующим решением в этой области уравнения Лапласа. Для получения численного решения задачи ниже в области Q вводится регулярная сетка и, решается конечно-разностный аналог уравнения Лапласа.

3. Решение задачи. Для описания области Q используем контрольные точки сплайна Catmull-Rom. Суть Catmull-Rom сплайна заключается в том, что в заданной последовательности точек $P_0(x^0, y^0), P_1(x^1, y^1), ..., P_n(x^u, y^u)$ для любых точек $P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$, $k = \overline{1, 2, ..., n-2}$, часть кривой, находящейся между точками P_k и P_{k+1}, задается следующим кубическим полиномом:

$$P(t) = \left(x_{P(t)}, y_{P(t)}\right) = \sum_{i=0}^{3} C_i t^i. \tag{3.1}$$

Постоянные $C_i(x^{k-1}, y^{k-1}, x^k, y^k, ..., y^{k+2})$, $i = 0,1,2,3$ определяются из матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 1 & \tau & 0 \\ 2\tau & \tau-3 & 3-2\tau & -\tau \\ -\tau & 2-\tau & \tau-2 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \end{pmatrix},$$

где коэффициент $\tau \in [0,1]$ определяет степень сгибания кривой в контрольных точках. Коэффициент τ называется степенью изгиба, и обычно принимается $\tau = \frac{1}{2}$.

Пусть, $(x, y) \in Q$. Примем следующие обозначения - $x_{\min} = \min\limits_{(x,y)\in Q}\{x\}$, $x_{\max} = \max\limits_{(x,y)\in Q}\{x\}$ и $y_{\min} = \min\limits_{(x,y)\in Q}\{y\}$, $y_{\max} = \max\limits_{(x,y)\in Q}\{y\}$. Для выбранных натуральных чисел n и m разобьем отрезки $[x_{\min}, x_{\max}]$ и $[y_{\min}, y_{\max}]$, соответственно, на n и m равных частей с шагами Δx и Δy, где $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$ и $\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{m}$, n, m - натуральные числа. Тогда, получим некоторую сетку:

$$\omega = \left\{ x_i = x_0 + i\Delta x,\ y_i = y_0 + j\Delta y,\ i = 0,1,...,n,\ j = 0,1,...,m \right\},$$

где $x_0 = x_{\min}$, $y_0 = y_{\min}$.

Перенесём граничные точки области на наиболее близкие узловые точки этой сетки. Для этого, сначала, рассмотрим линии $x = x_i$, $i = 0,1,2,...,n$. Опишем правило определения координат граничной точки $A_{pq} = \left(x^p, y^q\right)$, находящейся на этой линии, где p, q - натуральные числа. Возьмем точки $x_k = \max\limits_{x_i \le x^p}\{x_i\}$, $i = 0,1,2,...,n-1$ и $x_{k+1} = x_k + \Delta x$. Очевидно, что $x_k \le x^p \le x_{k+1}$. Из уравнения (3.1) определим значение $t^p \in [0,1]$, для которого $x^p = x_{P(t^p)}$ [9, стр.265]. Теперь определим аппроксимирующую точку, как узел ω, ближайший к $\left(x^p, y^q\right)$, полагая $y^q = y_{P(t^p)}$. Таким образом, была определена граничная точка. Затем аналогичную процедуру выполняем для линий $y = y_j$, $j = 0,1,2,...,m,$ и, тем самым, завершаем аппроксимацию краевых точек. Обозначим полученное множество через γ_ω.

Нетрудно увидеть, что относительно к γ_ω, узловые точки сети ω подразделяются на три подмножества:

$(x, y) \in \gamma_\omega$ - граничные точки;

$(x, y) \in Q \setminus \gamma_\omega$ - внутренние точки;

$(x, y) \in \overline{Q \bigcup \gamma_\omega}$ - внешние точки.

Чтобы определить высоту рельефа в точках между линиями уровня решим уравнение $\Delta h = 0$ методом конечных разностей в области $Q_\omega \equiv Q \setminus \gamma_\omega$. Обозначим через $h_{ij} = h(x_i, y_j)$ высоту поверхности в точке (x_i, y_j) $i = 0,1,...,n,$ $j = 0,1,...,m$. Тогда конечно-разностный аналог уравнения Лапласа запишется в следующем виде:

$$h_{ij} = \frac{1}{4}\left(h_{i+1j} + h_{i-1j} + h_{ij-1} + h_{ij+1}\right), \quad (x_i, y_j) \in Q \setminus \gamma_\omega. \tag{3.2}$$

Присоединяя к (3.2) краевые условия, представленные в множестве граничных точек γ_ω, получаем задачу, представляющую из себя численный аналог первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Решая ее методом итераций [10, стр.597] можем найти значения высот в узловых точках.

4. Заключение. Составлена программа, реализующая описанный выше алгоритм генерации поверхности. Численные примеры показывают, что генерированный таким образом рельеф достаточно хорошо описывает реальную земную поверхность, заданную Catmull-Rom сплайнами. Поэтому оно может быть использовано для имитации реальной обстановки при изучении течения жидкости по рельефу.

Литература

1. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р. Изогеометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по базовым критериям плавности, ДонНТУ, 2009.
2. Chun-Gang ZHU, Wen-Sheng KANG, Applying cubic b-spline quasi-interpolation to solve hyperbolic conservation laws, Scientific bulletin, 2010.
3. H. T. Rathod, H. Y. Shrivalli , K. V. Nagarajac and Kesavulu Naidu, On a New Cubic Spline Interpolation with Application to Quadrature, Int. Journal of Math. Analysis, 2010.
4. Manolya Eyiyurekli and David Breen, Localized Editing of Catmull-Rom Splines, Computer-Aided Design and Applications, 2009.
5. Phillip J. Barry, Ronald N. Goldman, A recursive evaluation algorithm for a class of Catmull-Rom splines, SIGGRAPH, 1988.
6. E. Catmull and R. Rom. A class of local interpolating splines, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, 1974.
7. Kenneth I. Joy. Catmull-Rom splines, Department of Computer Science, University of California, Davis, 2002.
8. Ким П.А. Математический конструктив мыльной пленки в масштабируемом рельефе. Труды V Международного научного конгресса «ГЕО-Сибирь-2009», 20-24 апреля 2009, Новосибирск, Россия, т.4, ч.1.
9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы, Москва, Наука, 1987.
10. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, МГУ, Наука, 2004.

UOT 51-72

R.S. Quliyeva. Səthin Catmull-Rom splaynı ilə verilmiş səviyə xətlərinə çəkilmiş elastik membran kimi modelləşdirilməsi.

Relyef səthinin elastik membran kimi ədədi generasiyası məsələsinə baxılır.Konturu təsvir etmək üçün səviyə xətlərini təşkil edən Catmull-Rom splaynının nəzarət nöqtələri çoxluğundan istifadə edilir.

Açar sözlər: Catmull-Rom splaynı, səviyə xətləri, səth, relyef

R.S. Guliyeva. Modelling surface as elastic membrane drawn to level curves given with catmull-rom splines.

Looking numerical generation of surface relief as elastic membrane. For describing contour used majority of control points of Catmull-Rom spline which forming level curves.

Keywords: Catmull-Rom spline, level curves, surface, relief

Институт кибернетики НАНА Представлено 04.02.14