Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-01.pdf

УДК 517.977

К.Б. МАНСИМОВ, Г.Ш. РАМАЗАНОВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ КАНОНИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучается одна задача оптимального управления химическим реактором с изменяющейся активностью катализатора. Получены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: каноническое гиперболическое уравнение, химический реактор с изменяющейся активностью катализатора, необходимое условие оптимальности, оптимизация химических реакторов

1. Введение. В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая системами канонических уравнений гиперболического типа первого порядка с краевыми условиями Гурса. Эта математическая модель, в частности, используется для описания каталитических процессов, происходящих в химических реакторах с изменяющейся активностью катализатора (см. напр. [1-13]).

Впервые подобная задача оптимального управления была исследована Г.М. Островским и Ю.М. Волиным (см. напр. [1-3]), которые получили для нее необходимое условие оптимальности в виде условия максимума Понтрягина при помощи, так называемого, интегрального принципа максимума.

В дальнейшем различные аспекты таких задач оптимального управления были исследованы в работах [4-13] и др. Обзор соответствующих результатов имеется, например, в работах [6-8, 12, 14, 15] и др.

Предлагаемая же работа посвящена исследованию подобной задачи оптимального управления в случае негладкого (дифференцируемого) критерия качества. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

2. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$z_t = f(t,x,z,y,u), \quad y_x = g(t,x,z,y,u), \quad (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0,x)&=a(x), \quad x\in[x_0,x_1],\\ y(t,x_0)&=b(t), \quad t\in[t_0,t_1]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $(z(t,x),\ y(t,x))$ − $(n+m)$-мерный вектор состояния, $t_0,\ t_1,\ x_0,\ x_1,\ (t_0<t_1;\ x_0<x_1)$ − заданные числа, $f(t,x,z,y,u)$ $(g(t,x,z,y,u))$ − заданная n (m)-мерная вектор-функция непрерывная в $D\times R^n\times R^m\times R^r$ вместе с частными производными по (z,y), $a(x)$, $b(t)$ − заданные n и m-мерные соответственно измеримые и ограниченные вектор-функции, $u=u(t,x)-$ r-мерная управляющая вектор-функция.

В качестве допустимых управлений берется класс измеримых и ограниченных в D r-мерных вектор функций $u(t,x)$ со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е.

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\ (t,x)\in D. \tag{2.3}$$

Следуя, например, работам [4, 5] под решением краевой задачи (2.1)-(2.2), соответствующим определенному допустимому управлению $u(t,x)\in L_\infty(D,U)$, понимаются вектор-функции $z(t,x)$, $y(t,x)$, которые представимы в виде:

$$z(t,x) = a(x) + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau,x)\,d\tau ,$$

$$y(t,x) = b(t) + \int_{x_0}^{x} \beta(t,s)\,ds ,$$

удовлетворяют почти всюду в D уравнению (2.1), а условия (2.2) выполняются почти всюду на $[x_0, x_1]$ и $[t_0, t_1]$ соответственно.

Здесь $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ – некоторые вектор-функции из $L_\infty(D, R^n)$ и $L_\infty(D, R^m)$ соответственно.

Из этого определения решения краевой задачи (2.1)-(2.2) непосредственно следует, что $z(t,x)$ $(y(t,x))$ измерима, ограничена в D и абсолютно непрерывна по t (x) для каждого x (t).

Из результатов работ [4, 5, 7, 14, 16], при сделанных предположениях, вытекает существование и единственность локального решения задачи (2.1)-(2.2) в указанном смысле.

В дальнейшем всюду предполагается, что для каждого допустимого управления $u(t,x)$ соответствующее решение $(z(t,x), y(t,x))$ системы (2.1)-(2.2) существует и единственно.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x, z(t_1, x))\,dx + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_2(t, y(t, x_1))\,dt , \tag{2.4}$$

определенного на решениях краевой задачи (2.1)-(2.2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x,z)$ $(\varphi_2(x,y))$ − заданная непрерывная в $[x_0, x_1] \times R^n$ $([t_0, t_1] \times R^m)$ скалярная функция, имеющая производные по направлению z (y) и удовлетворяющая условию Липшица по z (y).

Допустимое управление, доставляющее минимум функционалу (2.4) при ограничениях (2.1)-(2.3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс − оптимальным процессом.

Заметим, что задачи оптимального управления типа (2.1)-(2.4) возникают при оптимизации квазистационарных каталитических процессов в химических реакторах с изменяющейся активностью катализатора (см. например [1-6]).

3. Вспомогательные факты и необходимые условия оптимальности. Пусть $(u(t,x),\ z(t,x),\ y(t,x))$ − есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t,x) = (t,x) + \Delta u(t,x),\ \bar{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x),\quad \bar{y}(t,x) = y(t,x) + \Delta y(t,x))$, обозначим произвольный допустимый процесс.

Используя формулу Тейлора, с остаточным членом в форме Пеано получаем, что приращение $(\Delta z(t,x),\ \Delta y(t,x))$ состояния $(z(t,x),\ y(t,x))$ является решением линеаризованной задачи

$$\begin{aligned} \Delta z_t &= f_z(t,x)\Delta z + f_y(t,x)\Delta y + \Delta_{\bar{u}(t,x)} f(t,x) + \eta_1(t,x;\Delta u), \\ \Delta y_t &= g_z(t,x)\Delta z + g_y(t,x)\Delta y + \Delta_{\bar{u}(t,x)} g(t,x) + \eta_2(t,x;\Delta u), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad x \in [x_0, x_1]\ ; \quad \Delta y(t, x_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.2}$$

Здесь и в дальнейшем по определению

$$
\begin{gathered}
f_z(t,x) \equiv f_z(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
f_y(t,x) \equiv f_y(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
g_z(t,x) \equiv g_z(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
g_y(t,x) \equiv g_y(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
\Delta_{\bar u} f(t,x) \equiv f(t,x,z(t,x),y(t,x),\bar u) - f(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
\Delta_{\bar u} g(t,x) \equiv g(t,x,z(t,x),y(t,x),\bar u) - g(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),\\
\eta_1(t,x;\Delta u) = \Delta_{\bar u} f_z(t,x)\Delta z + \Delta_{\bar u} f_y(t,x)\Delta y + o_1(\|\Delta z\| + \|\Delta y\|),\\
\eta_2(t,x;\Delta u) = \Delta_{\bar u} g_z(t,x)\Delta z + \Delta_{\bar u} g_y(t,x)\Delta y + o_2(\|\Delta z\| + \|\Delta y\|).
\end{gathered}
$$

Интерпретируя задачу (3.1)-(3.2) как краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения относительно $(\Delta z,\, \Delta y)$, на основе формулы о представлении решений линейных неоднородных гиперболических уравнений первого порядка (см. напр.[8, 9]) имеем

$$
\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\,\tau,x)\Delta_{\bar u} f(\tau,x)d\tau + \eta_3(t,x;\,\Delta u), \tag{3.3}
$$

$$
\Delta y(t,x) = \int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;\,t,s)\Delta_{\bar u} g(t,s)ds + \eta_4(t,x;\,\Delta u), \tag{3.4}
$$

где по определению

$$
\eta_3(t,x;\,\Delta u) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial x}\left[\Delta_{\bar u} f(\tau,s) + \eta_1(\tau,s;\,\Delta u)\right] + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial V_{12}(t,x;\,\tau,s)}{\partial x}\left[\Delta_{\bar u} g(\tau,s) + \eta_2(\tau,s;\,\Delta u)\right]\right] ds\,d\tau + \int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\,\tau,x)\eta_1(\tau,x;\,\Delta u)d\tau,
$$

$$
\eta_4(t,x;\,\Delta u) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{21}(t,x;\,\tau,s)}{\partial t}\left[\Delta_{\bar u} f(\tau,s) + \eta_1(\tau,s;\,\Delta u)\right] + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial V_{22}(t,x;\,\tau,s)}{\partial t}\left[\Delta_{\bar u} g(\tau,s) + \eta_2(\tau,s;\,\Delta u)\right]\right] ds\,d\tau + \int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;\,t,s)\eta_2(t,s;\,\Delta u)ds.
$$

Здесь $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i=1,2$, $(t_0 \le \tau \le t \le t_1;\ x_0 \le s \le x \le x_1)$ матричные функции, являющиеся решениями следующих задач:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{11}(t,x;\,\tau,s) f_z(\tau,s) - V_{12}(t,x;\,\tau,s) g_z(\tau,s),\\
\frac{\partial V_{12}(t,x;\,\tau,s)}{\partial s} = -V_{11}(t,x;\,\tau,s) f_y(\tau,s) - V_{12}(t,x;\,\tau,s) g_y(\tau,s),\\
\frac{\partial V_{21}(t,x;\,\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{21}(t,x;\,\tau,s) f_z(\tau,s) - V_{22}(t,x;\,\tau,s) g_z(\tau,s),\\
\frac{\partial V_{22}(t,x;\,\tau,s)}{\partial s} = -V_{21}(t,x;\,\tau,s) f_y(\tau,s) - V_{22}(t,x;\,\tau,s) g_y(\tau,s),\\
V_{11}(t,x;\,t,s) = E_1, \qquad V_{12}(t,x;\,\tau,x) = 0,\\
V_{21}(t,x;\,t,s) = 0, \qquad V_{22}(t,x;\,\tau,x) = E_2,
\end{gathered}
$$

(E_i, $i = 1,2$ − единичные матрицы соответствующих размерностей).

Пусть $v \in U$ произвольный вектор, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ произвольная правильная точка (точка Лебега [17, 18]) управления $u(t,x)$, а $\varepsilon > 0 -$ достаточно малое произвольное число.

Считая $u(t,x)$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле:

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x), \ (t,x) \in D_\varepsilon = \left[\theta, \theta + \sqrt{\varepsilon}\right) \times \left[\xi, \xi + \sqrt{\varepsilon}\right), \\ 0, \ \ (t,x) \in D \setminus D_\varepsilon . \end{cases} \tag{3.5}$$

Из оценок, установленных например, в [4, с. 125-126, 7, с. 56-57, 8, с. 147] и др., следует, что для почти всех $(t,x) \in D$

$$\|\Delta z(t,x)\| \le K_1 \left(\int_{t_0}^{t} \|\Delta_{\bar u} f(\tau, x)\| d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar u} g(\tau, s)\| ds\, d\tau \right), \tag{3.6}$$

$$\|\Delta y(t,x)\| \le K_2 \left(\int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar u} g(t, s)\| ds + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar u} f(\tau, s)\| ds\, d\tau \right),$$

(K_i, $i = 1,2$ − некоторые положительные константы).

Через $(\Delta z_\varepsilon(t,x),\ \Delta y_\varepsilon(t,x))$, обозначим специальное приращение оптимального состояния $(z(t,x),\ y(t,x))$, отвечающее специальному приращению (3.5) оптимального управления $u(t,x)$.

Теперь вычислим специальное приращение функционала качества (2.4) с учетом оценок (3.6). Имеем:

$$S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi_1(x, z(t_1, x) + \Delta z_\varepsilon(t_1, x)) - \varphi_1(x, z(t_1, x))] dx +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\varphi_2(t, y(t, x_1) + \Delta y_\varepsilon(t, x_1)) - \varphi_2(t, y(t, x_1))] dt = \int_{x_0}^{\xi} [\varphi_1(x, z(t_1, x) + \Delta z_\varepsilon(t_1, x)) -$$

$$- \varphi_1(x, z(t_1, x))]\, dx + \int_{\xi}^{\xi + \sqrt{\varepsilon}} [\varphi_1(x, z(t_1, x) + \Delta z_\varepsilon(t_1, x)) - \varphi_1(x, z(t_1, x))] dx +$$

$$+ \int_{\xi + \sqrt{\varepsilon}}^{x_1} [\varphi_1(x, z(t_1, x) + \Delta z_\varepsilon(t_1, x)) - \varphi_1(x, z(t_1, x))] dx + \int_{t_0}^{\theta} [\varphi_2(t, y(t, x_1) + \Delta y_\varepsilon(t, x_1)) -$$

$$-\varphi_2(t,y(t,x_1))]dt+\int\limits_{\theta}^{\theta+\sqrt{\varepsilon}}[\varphi_2(t,y(t,x_1)+\Delta y_\varepsilon(t,x_1))-\varphi_2(t,y(t,x_1))]dt+$$

$$+\int\limits_{\theta+\sqrt{\varepsilon}}^{t_1}[\varphi_2(t,y(t,x_1)+\Delta y_\varepsilon(t,x_1))-\varphi_2(t,y(t,x_1))]dt=$$

$$=\int\limits_{\xi}^{\xi+\sqrt{\varepsilon}}\left[\varphi_1\left(x,z(t_1,x)+\int\limits_{t_0}^{t_1}V_{11}(t_1,x;t,x)\Delta_{\bar u_\varepsilon}f(t,x)dt+\eta_3(t,x;\Delta u_\varepsilon)\right)-\varphi_1(x,z(t_1,x))\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\theta}^{\theta+\sqrt{\varepsilon}}\left[\varphi_2\left(t,y(t,x_1)+\int\limits_{x_0}^{x_1}V_{22}(t,x_1;t,x)\Delta_{\bar u_\varepsilon}g(t,x)dx+\eta_4(t,x;\Delta u_\varepsilon)\right)-\varphi_2(t,\ y(t,x_1))\right]dt=$$

$$=\int\limits_{\xi}^{\xi+\sqrt{\varepsilon}}\left[\varphi_1\left(x,z(t_1,x)+\sqrt{\varepsilon}V_{11}(t_1,x;\theta,x)\Delta_v f(\theta,x)+o\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)-\varphi_1(t,z(t_1,x))\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\theta}^{\theta+\sqrt{\varepsilon}}\left[\varphi_2\left(t,y(t,x_1)+\sqrt{\varepsilon}V_{22}(t,x_1;t,\xi)\Delta_v g(t,\xi)+o\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)-\varphi_2(t,y(t,x_1))\right]dt= \quad (3.7)$$

$$=\varepsilon\left[\frac{\partial\varphi_1(\xi,z(t_1,\xi))}{\partial\ell_1(\theta,\xi,v)}+\frac{\partial\varphi_2(\theta,y(\theta,x_1))}{\partial\ell_2(\theta,\xi,v)}\right]+o(\varepsilon).$$

Здесь по определению

$$\ell_1(\theta,\xi,v)=V_{11}(t_1,\xi;\theta,\xi)\Delta_v f(\theta,\xi),$$
$$\ell_2(\theta,\xi,v)=V_{22}(\theta,x_1;\theta,\xi)\Delta_v g(\theta,\xi).$$

Из разложения (3.7) в силу оптимальности управления $u(t,x)$ приходим к следующему утверждению

Теорема 3.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial\varphi_1(\xi,z(t_1,\xi))}{\partial\ell_1(\theta,\xi,v)}+\frac{\partial\varphi_2(\theta,y(\theta,x_1))}{\partial\ell_2(\theta,\xi,v)}\ge 0 \quad (3.8)$$

выполнялось для всех $v\in U$, $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

4. Случай выпуклой области управления. В этом пункте предполагается, что множество U выпуклое, а вектор-функция $f(t,x,z,y,u)$ $(g(t,x,z,y,u))$ непрерывна в $D\times R^n\times R^m\times R^r$ вместе с частными производными (z,u) $((y,u))$.

Тогда можно показать, что приращение $(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x))$ состояния $(z(t,x),\ y(t,x))$ будет решением краевой задачи

$$\Delta z_t=f_z(t,x)\Delta z+f_y(t,x)\Delta y+f_u(t,x)\Delta u(t,x)+\eta_5(t,x;\Delta u),$$
$$\Delta y_x=g_z(t,x)\Delta z+g_y(t,x)\Delta y+g_u(t,x)\Delta u(t,x)+\eta_6(t,x;\Delta u), \quad (4.1)$$
$$\Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in[x_0,x_1];\quad \Delta y(t,x_0)=0,\ t\in[t_0,t_1]. \quad (4.2)$$

Здесь по определению

$$\eta_5(t,x;\Delta u)=o_3(\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta y(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|),$$
$$\eta_6(t,x;\Delta u)=o_4(\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta y(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|).$$

Запишем представление решения краевой задачи (4.1)-(4.2) по аналогии с (3.6)

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\,\tau,x)\,f_u(\tau,x)\Delta u(\tau,x)d\tau+\eta_7(t,x;\,\Delta u), \tag{4.3}$$

$$\Delta y(t,x)=\int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;\,t,s)g_u(t,s)\Delta u(t,s)ds+\eta_8(t,x;\,\Delta u)\,. \tag{4.4}$$

Здесь по определению

$$\eta_7(t,x;\,\Delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial x}\left[f_u(\tau,s)\Delta u(\tau,s)+\eta_5(\tau,s;\Delta u)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{12}(t,x;\,\tau,s)}{\partial x}\left[g_u(\tau,s)\Delta u(\tau,s)+\eta_6(\tau,s;\Delta u)\right]\right]ds\,d\tau+\int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\,\tau,x)\eta_5(\tau,x;\Delta u)d\tau,$$

$$\eta_8(t,x;\,\Delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{21}(t,x;\,\tau,s)}{\partial t}\left[f_u(\tau,s)\Delta u(\tau,s)+\eta_5(\tau,s;\Delta u)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{22}(t,x;\,\tau,s)}{\partial t}\left[g_u(\tau,s)\Delta u(\tau,s)+\eta_6(\tau,s;\Delta u)\right]\right]ds\,d\tau+\int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;\,t,s)\eta_6(\tau,x;\Delta u)ds.$$

Далее, при сделанных предположениях для $\|\Delta z(t,x)\|$ и $\|\Delta y(t,x)\|$, справедливы оценки (см. напр. [4, с. 115-116; 5, с. 92-95; 7, с. 35-36; 8, с. 147]):

$$\begin{aligned}\|\Delta z(t,x)\| &\le K_3\left(\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau,x)\|\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|\,ds\,d\tau\right),\\ \|\Delta y(t,x)\| &\le K_4\left(\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(t,s)\|\,ds+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|\,ds\,d\tau\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

($K_i>0$, $i=3,4$ − некоторые постоянные).

Специальное приращение допустимого управления $u(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u(t,x;\mu)=\mu\left[v(t,x)-u(t,x)\right]. \tag{4.6}$$

Здесь $\mu\in[0,1]$ − произвольное число, $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$ − произвольное допустимое управление.

Через $(\Delta z(t,x;\mu),\,\Delta y(t,x;\mu))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(z(t,x),\,y(t,x))$, соответствующее приращению (4.6) управления $u(t,x)$.

Из оценок (4.6) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Delta z(t,x;\mu)\| &\le K_5\,\mu,\\ \|\Delta y(t,x;\mu)\| &\le K_6\,\mu,\end{aligned}\qquad (t,x)\in D \tag{4.7}$$

($K_i>0$, $i=5,6$ − некоторые постоянные).

С учетом (4.6), (4.7) из представлений (4.3), (4.4) соответственно, получаем, что

$$\Delta z(t_1,x;\mu)=\mu\int_{t_0}^{t_1} V_{11}(t_1,x;\,t,x)\,f_u(t,x)(v(t,x)-u(t,x))dt+o(\mu),$$

$$\Delta y(t,x_1;\mu)=\mu\int_{x_0}^{x_1} V_{22}(t,x_1;\,t,x)\,f_u(t,x)(v(t,x)-u(t,x))dx+o(\mu). \tag{4.8}$$

Полагая

$$\ell_3(x,v)=\int_{t_0}^{t_1}V_{11}(t_1,x;\,t,x)\,f_u(t,x)(v(t,x)-u(t,x))dt\,,$$

$$\ell_4(t,v)=\int_{x_0}^{x_1}V_{22}(t,x_1;\,t,x)\,g_u(t,x)(v(t,x)-u(t,x))dx\,,$$

представления (4.8) записываются в виде

$$\begin{aligned}\Delta z(t_1,x;\mu)&=\mu\,\ell_3(x,v)+o(\mu),\\ \Delta y(t,x_1;\mu)&=\mu\,\ell_4(t,v)+o(\mu).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Используя формулы (4.9), показывается справедливость следующего специального разложения для приращения функционала качества (2.4) в виде

$$S(u+\mu(v-u))-S(u)=\mu\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_1'(\xi,z(t_1,\xi))}{\partial\ell_3(\xi,v)}d\xi+\mu\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_2'(\theta,y(\theta,x_1))}{\partial\ell_4(\theta,v)}d\theta+o(\mu). \tag{4.10}$$

При помощи разложения (4.10) доказывается

Теорема 4.1. Если множество U выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_1'(\xi,z(t_1,\xi))}{\partial\ell_3(\xi,v)}d\xi+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_2'(\theta,y(\theta,x_1))}{\partial\ell_4(\theta,v)}d\theta\ge 0$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$ и $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

5. Заключение. В работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений первого порядка с краевыми условиями типа Гурса и негладким функционалом качества. Получены необходимые условия оптимальности.

Литература

1. Волин Ю.М., Островский Г.М. Об одной оптимальной задаче // Автоматика и телемеханика. 1964, № 10, с. 1414-1420.
2. Островский Г.М., Волин Ю.М. Методы оптимизации химических реакторов. М. Химия, 1967, 248 с.
3. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических систем. М. Химия, 1975, 311 с.
4. Васильев О.В. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами // В сб. Прикладная математика. Новосибирск, Наука, 1978, с. 109-136.
5. Васильев О.В. Об одной задаче оптимального управления процессом с распределенными параметрами и управляемыми граничными условиями // В сб. Дифференц. и интегральные уравнения. Иркутск. 1976, вып. 4, с. 82-100.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. Наука, 1981, 400 с.
7. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутск. Ун-ва, 1989, 160 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, "Элм", 2010, 360 с.
9. Васильев О.В., Терлецкий В.А. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // В сб.: Оптимизация динамических систем. Минск, 1978, с. 26-30.
10. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления. Баку, 1985, 38 с. Рукопись представлена ИК АН Азербайджанской ССР. Деп. В ВИНИТИ, № 6063-85.
11. Васильев О.В. Об одной задаче оптимального управления процессом с распределенными параметрами и управляемыми граничными условиями // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск. 1976, вып. 4, с. 92-100.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с распределенными параметрами. Препринт ИМ АН БССР. № 31(156). Мн. 1982, 31 с.
13. Егоров А.И. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // В сб.: Оптимальные системы. Статистические методы. М. 1967, с. 76-92.
14. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. Н. Наука. 1990, 151 с.
15. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку. ЭЛМ, 2003, 96 с.
16. Маркин Е.А., Стрекаловский А.С. О существовании, единственности и устойчивости решения для одного класса динамических систем, описывающих химические процессы // Вестник МГУ, Сер. Выч. Мат. и кибернетики. 1977, № 4, с. 3-11.
17. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький. Издание ГГУ, 1986, 87 с.
18. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М. Наука, 1974, 480 с.

UOT 517.977.52

K.B. Mənsimov, G.Ş. Ramazanova

Kanonik hiperbolik tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsi haqqında

Məqalədə hiperbolik tip birinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məlum işlərdən fərqli olaraq, keyfiyyət meyarını təsvir edən funksiyaların hamarlığı tələb olunmur. İstiqamət üzrə törəmə terminində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: kanonik hiperbolik tənlik, katalizatorun aktivliyi dəyişən kimyəvi reaktor, optimallıq üçün zəruri şərt, kimyəvi reaktorların optimallaşdırılması

K.B. Mansimov, G.Sh. Ramazanova

An optimal control problem described by a system of canonical hyperbolic equations

In the paper we consider an optimal control problem described by a system of homogeneous partial differential equations of first order. Unlike the known works, the smoothness of the functions describing the quality criterion is not required. The first order necessary optimality conditions in the term of the derivative in direction are obtained.

Keywords: canonical hyperbolic equation, chemical reactor with the changing activity of the catalyst, necessary condition for optimality, optimization of chemical reactors

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 28.11.13