Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-02.pdf

УДК 519.622.2

Е.Р. АШРАФОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕРАЗДЕЛЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследуется численный подход для решения системы независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с неразделенными граничными условиями. Данный подход основан на применении аналога метода непрерывного переноса краевых условий, учитывающего специфические особенности рассматриваемой системы. Разработаны формулы и алгоритмы для численного решения задачи, приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, неразделенные краевые условия, перенос краевых условий, метод Рунге-Кутты, задача Коши

1. Введение. В последние годы задачам с нелокальными условиями посвящено достаточно много исследований, связанных с получением условий существования единственности решений. Увеличивается и число работ по исследованию и разработке численных методов решения этих задач.

В данной работе разработан и исследован численный метод прогонки для расчета динамических процессов, описываемых системой независимых дифференциальных уравнений второго порядка с совместными нелокальными и неразделенными краевыми условиями. Спецификой системы уравнений, рассмотренной в статье, является то, что уравнения предполагаются независимыми друг от друга, т.е. участвующие в них функции связаны только краевыми условиями. Такие задачи встречаются при численном исследовании сложных многозвенных систем сетевой структуры, поведение каждого звена которых описывается отдельным уравнением второго порядка гиперболического типа. На практике эти задачи возникают, например, в математических моделях процессов нефтегазодобычи, в которых имеется возможность ведения учета добычи сырья из пласта только в целом по кусту скважин, при расчете неустановившегося режима движения жидкости, газа в трубопроводной системе сложной закольцованной структуры, сложных объектов и технологических процессов, при математическом моделировании которых использовались методы декомпозиции [1]-[9]. Математическая постановка рассматриваемой задачи представляется в общем случае как двухточечная задача относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и для ее решения можно использовать известные методы, в частности, прогонки [10]-[17].

В работе, учитывая специфическую структуру системы дифференциальных уравнений и слабую, но произвольную заполненность матрицы краевых условий, предлагается вариант метода переноса краевых условий. Преимущество предлагаемого подхода в сравнении с непосредственным использованием методов переноса в общем виде очевидно, т.к. здесь перенос осуществляется только относительно тех переменных, коэффициенты которых в краевых условиях отличны от нуля, при этом перенос осуществляется с применением только того дифференциального уравнения, в котором участвует переносимая переменная.

Приводятся результаты численных экспериментов, полученных при решении тестовой задачи, основой которой является задача расчета неустановившегося движения жидкости для фрагмента трубопроводной сети сложной структуры.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему n независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{y}_k(x) = a_k(x)\dot{y}_k(x) + b_k(x)y_k(x) + c_k(x),\ x \in (0, l_k),\ k = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

с неразделенными краевыми условиями вида

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}^{l}\dot{y}_k(l_k)+\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{l} y_k(l_k)=r_i^l, \quad i=\overline{1,n_1}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}^{0}\dot{y}_k(0)+\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{0} y_k(0)=r_i^0, \quad i=\overline{1,n_2}, \tag{2.3}$$

или в более общем виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left[g_{ik}^{l}\dot{y}_k(l_k)+q_{ik}^{l}y_k(l_k)+g_{ik}^{0}\dot{y}_k(0)+q_{ik}^{0}y_k(0)\right]=r_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{2.4}$$

Здесь $m=2n=n_1+n_2$; $a_k(x), b_k(x), c_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, $-$ заданные непрерывные функции, причем $a_k(x), b_k(x)\neq const, x\in(0,l_k)$; $g_{ik}^{l,0}, q_{ik}^{l,0}, r_i^{l,0}, i,k=\overline{1,n}$, $-$ заданные величины; неизвестные $y_k(x)-$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x\in[0,l_k]$; $l_k>0-$ заданы и упорядочены, т.е. $0<l_k<l_{k+1}$, $k=1,..,n-1$.

Задача (2.1), (2.4) является двухточечной краевой задачей. Исследованию вопросов существования и единственности решения краевых задач в общем случае посвящено достаточно много работ [19,20]. Но отметим, что имеющиеся условия существования и единственности решения для неавтономных систем не имеют конструктивного характера и используют фундаментальную матрицу решений, построение которой для неавтономных систем представляет сложную проблему. Поэтому на практике разрешимость задачи проверяется в процессе самого численного метода решения задачи. Далее будем предполагать, что рассматриваемая задача корректна, т.е. решение имеется и оно единственно.

Задача (2.1), (2.4) характеризуется следующими специфическими особенностями: 1) дифференциальные уравнения системы (2.1) взаимно независимы, 2) большим порядком системы (2.1) в целом, 3) решения уравнений $y_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, и их производные первого порядка $\dot{y}_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, связывают неразделенные краевые условия, характеризуемые слабо, но произвольно заполненными матрицами связей G^l, G^0, Q^l, Q^0 размерности $m\times n$, определяющиеся из компактной записи условий (2.4):

$$G^l\dot{y}(l)+Q^l y(l)+G^0\dot{y}(0)+Q^0 y(0)=R, \tag{2.5}$$

где $R=(r^1,...,r^m)^T$ $-$заданный m-мерный вектор. Здесь использовано обозначение:

$$y(0)=(y_1(0),...,y_n(0))^T, \qquad y(l)=(y_1(l_1),...,y_n(l_n))^T,$$

$$\dot{y}(0)=(\dot{y}_1(0),...,\dot{y}_n(0))^T, \qquad \dot{y}(l)=(\dot{y}_1(l_1),...,\dot{y}_n(l_n))^T,$$

$^T-$знак транспонирования.

Рассматриваемой задачей может быть описана математическая модель многозвенного динамического объекта с сосредоточенными параметрами сложной конфигурации, каждое звено которого описывается независимым от других звеньев дифференциальным уравнением с обыкновенными производными. Концы самих звеньев соединены произвольным образом, связи между которыми характеризуются соотношениями (2.2), (2.3) или (2.4), а именно ненулевыми элементами матриц $G^i, Q^i, i\in\{l,0\}$. Для реальных объектов число связей (ненулевых коэффициентов в (2.2)-(2.4)) намного меньше общей размерности задачи n.

Подобные модели получаются при использовании декомпозиционных методов математического моделирования сложных и больших по размерности технических объектов и технологических процессов [1]-[6], [20]-[22]. Для объектов с распределенными параметрами во времени и пространстве декомпозиция (дискретизация) может проводиться по пространственным переменным или по времени [1]-[9].

К рассматриваемой задаче приводится задача расчета неустановившихся процессов движения жидкости, газа в трубопроводных сетях сложной закольцованной структуры. Математические модели таких процессов описываются системами уравнений с частными производными, состоящих из уравнений гиперболического типа, описывающих процесс движения на каждом отдельном участке. В местах соединения участков выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые определяются условиями вида (2.4). Применение метода прямых по временной или пространственной переменной (аналог применения декомпозиции) приводит задачу расчета режимов движения сырья транспортной сети к задаче вида (2.1), (2.4).

3. Численное решение задачи. Для решения задачи (2.1), (2.4) можно непосредственно использовать различные известные схемы метода прогонки [11]-[18]. Такой подход, учитывая указанные выше особенности задачи, не эффективен, в особенности, если она решается многократно в рамках, например, задачи оптимального управления объектом, описываемого математической моделью (2.1), (2.4).

Ниже излагается подход, являющийся аналогом метода переноса условий, учитывающий специфику системы (2.1) и условий (2.4), приводятся соответствующие формулы, алгоритмы, не требующие одновременного решения всех уравнений системы (1.1).

Предлагаемый подход, как и все методы переноса условий, заключается в замене в условиях (2.1) значений $y(0), \dot{y}(0)$ (или $y(l), \dot{y}(l)$) за счет переноса вправо (влево) эквивалентными комбинациями значений $y(l), \dot{y}(l)$ (или $y(0), \dot{y}(0)$ при переносе влево). В результате вместо (2.5) будут получены m условий вида:

$$\tilde{G}^l \dot{y}(l) + \tilde{Q}^l y(l) = \tilde{R}, \tag{3.1}$$

при переносе условий (2.5) вправо или вида

$$\tilde{G}^0 \dot{y}(0) + \tilde{Q}^0 y(0) = \tilde{R}, \tag{3.2}$$

при переносе условий (2.5) влево.

Учитывая слабую заполненность матриц $G^i, Q^i, i \in \{l,0\}$, с тем, чтобы не иметь дело с матричными операциями, каждое условие из (2.4) будем переносить отдельно.

Во многих конкретных практических задачах большое количество условий из (2.4) вместо общего вида могут быть, например, вида (2.2), (2.3) или разделенными, более того, совпадать с условиями Коши на левом или правом концах. Поэтому выбор направления переноса условий влево или вправо следует осуществлять исходя из того, в каком конце локальных условий больше в тот конец и переносить оставшиеся условия.

И так, рассмотрим произвольное i -тое условие из (2.5), $i = 1,...,m,$ которое имеет представление (2.4). Перенесем i -тое условие (2.4) в правый конец, т.е. получим эквивалентное ему условие:

$$\tilde{g}^l_{i1}\dot{y}_1(l_1) + \tilde{g}^l_{i2}\dot{y}_2(l_2) + ... + \tilde{g}^l_{in}\dot{y}_n(l_n) + \tilde{q}^l_{i1}y_1(l_1) + \tilde{q}^l_{i2}y_2(l_2) + ... + \tilde{q}^l_{in}y_n(l_n) = \tilde{r}^i,$$

которое можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\tilde{g}^l_{ik}\dot{y}_k(l_k) + \tilde{q}^l_{ik}y_k(l_k)\right] = \tilde{r}_i \ , \tag{3.3}$$

где $\tilde{g}^l_{ik}, \tilde{q}^l_{ik}, \tilde{r}^i$ – некоторые пока неизвестные коэффициенты; n -мерные векторы $\dot{y}_k(l_k), y_k(l_k)$ – неизвестные значения решения k -той уравнении системы (2.1) в правом конце.

Получение условия вида (2.3) будем осуществлять поэтапно.

Пусть среди коэффициентов g_{ik}^0, q_{ik}^0 $k=\overline{1,n}$ имеются ненулевые. В противном случае i-тое условие прогонять вправо не надо, т.к. в этом условии участвуют только значения $y(l)$ и $\dot{y}(l)$. Пусть первый отличный от нуля коэффициент есть $g_{is}^0 \neq 0$ или $q_{is}^0 \neq 0$, $1 \le s \le n$, $g_{ik}^0 = 0, q_{ik}^0 = 0$ для $k < s$.

Определение 1. Будем говорить, что непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ такие, что

$$\alpha(0) = g_{is}^0,\ \ \beta(0) = q_{is}^0,\ \ \gamma(0) = r_i\,, \tag{3.4}$$

переносят i-тое условие в (2.4) право, если для произвольного решения $y_s(x)$ s-того уравнения системы (2.1):

$$\ddot{y}_s(x) = a_s(x)\dot{y}_s(x) + b_s(x)y_s(x) + c_s(x),\ x \in [0, l_s], \tag{3.5}$$

для всех $x \in [0, l_s]$, имеет место равенство

$$\alpha(x)\dot{y}_s(x) + \beta(x)y_s(x) + \\ + \left[\sum_{k=s+1}^{n}\left(g_{ik}^0\dot{y}_k(0) + q_{ik}^0 y_k(0)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(g_{ik}^l\dot{y}_k(l_k) + q_{ik}^l y_k(l_k)\right)\right] = \gamma(x). \tag{3.6}$$

Ясно, что условие (3.6), учитывая (3.4), при $x = 0$ совпадает с i-тым условием (2.4). Функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ будем называть прогоночными. Подставляя значения функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ при $x = l_s$ в (3.5), получим равенство, эквивалентное i-тому условию

$$\sum_{k=s+1}^{n}\left(g_{ik}^0\dot{y}_k(0) + q_{ik}^0 y_k(0)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{g}_{ik}^l\dot{y}_k(l_k) + \tilde{q}_{ik}^l y_k(l_k)\right) = \tilde{r}_i\,,$$

где обозначено $\tilde{g}_{ik}^l = g_{ik}^l + \alpha(l_s)$, $\tilde{q}_{ik}^l = q_{ik}^l + \beta(l_s)$, $\tilde{r}_i = \gamma(l_s)$, $\tilde{g}_{ik}^l = g_{ik}^l$, $\tilde{q}_{ik}^l = q_{ik}^l$ $k = 1,...,n, k \neq s$.

Прогоночные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, производящие перенос условий, не единственны. Можно использовать функции, предлагаемые в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ при $x \in [0, l_s]$ являются решением следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(x) = -\alpha(x)a_s(x) - \beta(x), & \alpha(0) = g_{is}^0, \\ \dot{\beta}(x) = -\alpha(x)b_s(x), & \beta(0) = q_{is}^0, \\ \dot{\gamma}(x) = \alpha(x)c_s(x), & \gamma(0) = r_i. \end{cases} \tag{3.7}$$

Тогда эти функции удовлетворяют условию (3.6) при $x \in [0, l_s]$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ пока произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие (3.6) и условию (3.4). Продифференцируем (3.6):

$$\dot{\alpha}(x)\dot{y}_s(x) + \alpha(x)\ddot{y}_s(x) + \dot{\beta}(x)y_s(x) + \beta(x)\dot{y}_s(x) = \dot{\gamma}(x)$$

Учитывая здесь уравнение (3.5), сгруппировав слагаемые, получим

$$[\dot{\alpha}(x) + \alpha(x)a_s(x) + \beta(x)]\dot{y}_s(x) + [\dot{\beta}(x) + \alpha(x)b_s(x)]y_s(x) - \dot{\gamma}(x) + \alpha(x)c_s(x) = 0. \tag{3.8}$$

Учитывая произвольность функций $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ и необходимость выполнения равенства (3.8) для всех решений $y_s(x)$ уравнения (3.5), потребуем выполнения равенства нулю выражений в квадратных скобках. Отсюда следует, что $\alpha(x), \beta(x)$ являются решением задачи Коши (3.7).

После проведения указанной выше процедуры, она повторяется для следующих переменных $\dot{y}_k(0), y_k(0), k > s$, у которых коэффициенты $g^0_{ik} \neq 0, q^0_{ik} \neq 0$, пока в i-том условии не перестанет участвовать какая-либо компонента векторов $\dot{y}(0) = (\dot{y}_n(0),..., \dot{y}_n(0))$, $y(0) = (y_1(0),..., y_n(0))$. После этого необходимо перейти к $(i+1)$-му условию (2.4), пока эти процедуры не будут проведены для всех ограничений и получено условие вида (3.1).

Решением системы алгебраических уравнений m-ого порядка (3.1) определяются векторы

$$\dot{y}(l) = (\dot{y}_1(l_1),..., \dot{y}_n(l_n))^T, \; y(l) = (y_1(l_1),..., y_n(l_n))^T$$

Для определения искомых вектор-функций $y_s(x), x \in [0, l_s]$ компоненты $y_s(l_s), \dot{y}_s(l_s), s = 1,..., n$, найденного вектора $y(l), \dot{y}(l)$ используются в качестве начальных значений для соответствующих задач Коши относительно каждого отдельного уравнения системы (2.1), решаемых в обратном порядке: от $x = l_s$ до $x = 0$, $s = 1,..., n.$

Аналогично вышеизложенному осуществляется перенос условий влево для получения эквивалентных (2.4) условий вида (3.2).

Пусть в i-том условии (2.4) среди коэффициентов g^l_{ik}, q^l_{ik} $k = \overline{1, n}$ имеются ненулевые, например, первым из них является $g^l_{is} \neq 0$ или $q^l_{is} \neq 0$, $1 \leq s \leq n$, $g^l_{ik} = 0, q^l_{ik} = 0$ для $k < s$.

Определение 2. Будем говорить, что непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ такие, что

$$\alpha(l_s) = g^l_{is}, \;\; \beta(l_s) = q^l_{is}, \;\; \gamma(l_s) = r_i \tag{3.9}$$

переносят i-тое условие в (2.4) влево, если для произвольного решения $y_s(x)$ s-того уравнения системы (2.1) :

$$\ddot{y}_s(x) = a_s(x)\dot{y}_s(x) + b_s(x)y_s(x) + c_s(x), \; x \in [0, l_s], \tag{3.10}$$

для всех $x \in [0, l_s]$ имеет место равенство

$$\alpha(x)\dot{y}_s(x) + \beta(x)y_s(x) + \\ + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(g^0_{ik}\dot{y}_k(0) + q^0_{ik}y_k(0)\right) + \sum_{k=s+1}^{n}\left(g^l_{ik}\dot{y}_k(l_k) + q^l_{ik}y_k(l_k)\right)\right] = \gamma(x). \tag{3.11}$$

Ясно, что условие (3.11), учитывая (3.9), при $x = l_s$ совпадает с i-тым условием (2.4). Если такие прогоночные функции известны, то равенство (3.10) при $x = 0$ примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{g}^0_{ik}\dot{y}_k(0) + \tilde{q}^0_{ik}y_k(0)\right) + \sum_{k=s+1}^{n}\left(g^l_{ik}\dot{y}_k(l_k) + q^l_{ik}y_k(l_k)\right) = \tilde{r}_i,$$

где обозначено $\tilde{g}^0_{ik} = g^0_{ik} + \alpha(0)$, $\tilde{q}^0_{ik} = q^0_{ik} + \beta(0)$, $\tilde{r}_i = \gamma(0)$, $\tilde{g}^0_{ik} = g^0_{ik}$, $\tilde{q}^0_{ik} = q^0_{ik}$ $k = 1,..., n, k \neq s$. В условии (3.11), эквивалентном i-тому условию в (2.4), участвует на одну переменную, заданную в правом конце, меньше, чем до переноса.

Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ при $x \in [0, l_s]$ являются решением следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(x) = -\alpha(x)a_s(x) - \beta(x), & \alpha(l_s) = g_{is}^l, \\ \dot{\beta}(x) = -\alpha(x)b_s(x), & \beta(l_s) = q_{is}^l, \\ \dot{\gamma}(x) = \alpha(x)c_s(x), & \gamma(l_s) = r_i. \end{cases} \tag{3.12}$$

Тогда эти функции удовлетворяют условию (3.11) при $x \in [0, l_s]$.

Ясно, что задачи Коши (3.12) решаются в обратном направлении: от $x = l_s$ до $x = 0$. Процедура переноса значений функций $y(l), \dot{y}(l)$, участвующих в условиях (2.4), производится последовательно для всех условий и всех компонент векторов $\dot{y}(l) = (\dot{y}_1(l_1), ..., \dot{y}_n(l_n))^T$, $y(l) = (y_1(l_1), ..., y_n(l_n))^T$.

Порядок проведения переноса произволен, т.е. можно во всех условиях перенести какую-либо переменную с одного конца в другой, потом перейти к переносу другой переменной во всех условиях. Аналогично, можно для одного условия перенести значения всех переменных в один конец, потом эту процедуру провести последовательно для всех других условий.

Замечание. Как следует из вышесказанного, перенос каждого из условий (2.4) осуществляется независимо друг от друга, следовательно, выполнение этой процедуры хорошо распараллеливается. После же решения системы алгебраических уравнений (3.1) или (3.2) хорошо распараллеливается решение задач Коши относительно уравнений системы (2.1).

4. Результаты численных экспериментов.

Задача. Рассмотрим результаты численного решения следующей краевой задачи относительно системы пяти подсистем дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{y}_1(x) = 2\dot{y}_1(x) - 2e^x - 4x + 2, \ x \in [0,1],$$

$$\ddot{y}_2(x) = -3\dot{y}_2(x) - 3.5e^{\frac{x}{2}} + 9 - \cos x - 3\sin x, \ x \in [0,1],$$

$$\ddot{y}_3(x) = 0.53\dot{y}_3(x) - 0.5, \ x \in [0,1],$$

$$\ddot{y}_4(x) = \dot{y}_4(x) - 0.5e^{\frac{x}{2}} - x, \ x \in [0,1],$$

$$\ddot{y}_5(x) = \dot{y}_5(x) - 0.5e^{\frac{x}{2}} - x^2 + 2x, \ x \in [0,1], \tag{4.1}$$

при следующих десяти условиях:

$$y_1(0) + y_2(0) + y_3(0) = 0, \tag{4.2}$$

$$\dot{y}_1(0) - \dot{y}_3(0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\dot{y}_2(0) - \dot{y}_3(0) = 0, \tag{4.4}$$

$$y_4(0) = 4, \tag{4.5}$$

$$y_5(0) = -1, \tag{4.6}$$

$$y_1(1) = 4{,}437, \tag{4.7}$$

$$y_2(1) = 0{,}243, \tag{4.8}$$

$$y_4(1) + y_3(1) + y_5(1) = 9{,}726, \tag{4.9}$$

$$\dot{y}_3(1) - \dot{y}_5(1) = 0, \tag{4.10}$$

$$y_4(1) - y_5(1) = 0. \tag{4.11}$$

В данной задаче $\mathrm{n}=5,\ l_k=1,\ k=\overline{1,5}$, ее точным решением являются функции:

$$y_1(x)=x^2+2e^x-2, \qquad y_2(x)=3x-2e^{\frac{x}{2}}+\cos x,$$

$$y_3(x)=x+2e^{\frac{x}{2}}-1, \qquad y_4(x)=0.5x^2+2e^{\frac{x}{2}}+2,$$

$$y_5(x)=0.3x^3+2e^{\frac{x}{2}}-3. \tag{4.12}$$

Задача имитирует расчет режимов неустановившегося движения жидкости в трубопроводной системе, состоящей из 5 участков (рис.1).

Приведенные уравнения гипотетически могут быть получены применением метода прямых при аппроксимации производной по времени к уравнениям гиперболического типа, описывающих движение по каждому участку [23,24].

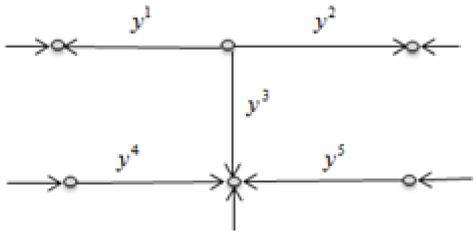

Рис.1. Схема движения жидкости в трубопроводной системе, состоящей из 5 участков

Условия (4.2), (4.9) имитируют законы материального баланса сырья в вершинах, условия (4.3), (4.4), (4.10), (4.11) – непрерывность потока (равенство давления в точках участков, примыкающих к общим вершинам), условия (4.5)-(4.8) определяют заданные значения расхода сырья по источникам (притоки и оттоки в сети).

Направления движения потоков в сети на рис.1 указаны формально, т.е. расчеты фактических режимов движения могут быть таковы, что расход по какому-либо участку может быть отрицательным, что указывает на то, что формальное направление для этого участка на рис.1 и фактическое направление движения противоположны.

Как видно из 10 условий (4.2)-(4.11), на левом и правом концах заданы по пять условий. Перенос условий (4.2)-(4.6) был осуществлен вправо с помощью функций, являющихся решением задач Коши (3.7). Для численного решения задач Коши использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h=0.01$.

Учитывая уже имеющиеся на правом конце условия (4.7)-(4.11), за счет переноса условий (4.2)-(4.6) вправо была получена алгебраическая система вида (3.1), матриц $\tilde{G}^l, \tilde{Q}^l$ которой приведенs в таблице 1, а правой частью системы служит вектор:

$$\tilde{R}=(-0.5659; 8.6332; -0.6001; 4.1231; -1.0435; 4.4365; 0.2428; 9.7256; 0; 0)^T.$$

Пользуясь методом Гаусса, были получены векторы:

$$\dot{y}(l)=(7{,}4365; 0{,}5098; 2{,}6487; 2{,}6487; 2{,}6487)^{\mathrm{T}},$$

$$y(l)=(4{,}4365; 0{,}2428; 3{,}2974; 5{,}7974; 0{,}6307)^{\mathrm{T}}.$$

для компонент которого максимальное отклонение от точных значений, полученных из (4.12), составило величину меньшую, чем 10^{-8}. Далее для получения вектора $y(x)$ решаются задачи Коши для отдельных независимых уравнений системы (4.1) с начальными условиями на правом конце.

Табл.1 Полученные значения элементов матриц $\tilde{G}^l$ и $\tilde{Q}^l$

j / i	1	2 $\tilde{G}^l$	3	4	5	6	7 $\tilde{Q}^l$	8	9	10
1	-0.4323	-6.3618	-0.7869	0	0	1	1	1	0	0
2	0	20.085	-0.6065	0	0	0	0	0	0	0
3	0,1353	0	-0.6065	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.6321	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	-0.6321	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1

5. Заключение. Системы дифференциальных уравнений большой размерности, возникающие во многих практических приложениях, как правило, характеризуются условиями, связывающими начальные и конечные значения неизвестных функций, с произвольной и слабо заполненной матрицей Якоби. Вообще говоря, эти задачи являются частным случаем двухточечных краевых задач и для их численного решения возможно использование различных схем метода прогонки. Для более эффективного численного их решения в данной работе предложен подход, основанный на идее переноса условий, но существенно использующий специфические особенности задачи. Приводятся необходимые формулы, схемы решения. Рассматриваемая в работе иллюстративная тестовая задача получена в результате применения метода прямых для расчета режимов движения жидкости на примере фрагмента сложной трубопроводной транспортной сети, при этом движение на каждом линейном участке описывается системой двух дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа.

Предложенный подход может быть использован при расчете компьютерных моделей сложных и больших систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, полученных с использованием декомпозиционных методов математического моделирования.

**** Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант No EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1***

Литература

1. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности М.Наука, 1981, 352с.
2. Янушевский Р.Т. Декомпозиция при решении задач синтеза линейных многосвязных систем управления Сб. Теория и методы построения систем многосвязного регулирования, М.Наука, 1973.
3. Айда-заде К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач управления системами с распределенными параметрами //"Ж. вычисл. матем. и математический физики", Москва, 1989, No 3.
4. Айда-заде К.Р., Ализаде Р.И., Новрузбеков И.Г., Калаушин М.А. Декомпозиционный метод анализа и синтеза плоских механизмов //Механика машин, Москва, Наука, вып. 57, 1980.
5. Aida-zade K.R. Investigation of non-linear optimization problems of networks structure //Automation and Remote Control, No 2, 1990.
6. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М. Наука, 1985, 352с.
7. Красовский А.А. Декомпозиция и синтез субоптимальных адаптивных систем //Изв АНСССР, Техн. кибер., 1984, No 2, с. 157-165.

8. Efendiev Y., Galvis J., Lazarov R.D., Margenov S., Ren J. Multiscale domain decomposition preconditioners for anisotropic high-contrast problems //Technical Report ISC-Preprint 2011-05, Institute for scientific Computation (2011).
9. Juergen Geiser, Decomposition methods for differential equations: theory and applications CRC Press 2010. p.304
10. Абрамов А.А.О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) //Ж. вычисл. матем. и математической физики, Москва, 1961, т.1, No3, с.542-545.
11. Абрамов А.А., Бураго Н.Г., Дышко А.Л., и др. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач //Сообщения по программному обеспечению ЭВМ., ВЦ АН СССР, Москва, 1982, 64 с.
12. Абдуллаев В.М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал индустриальной математики, Новосибирск, 2012, т.15, No (51), с.3-15.
13. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Задача управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями //Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев, 2013, No 2, с.61-77.
14. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions //Differential Equations, 2013, vol. 49, No. 9, pp.1114–1125.
15. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем М.: Наука, 1983.
17. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978, 592с.
18. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917,308 с.
19. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. I I - Киев: “Наук. думка”, 1966, 244 с.
20. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра. 1975. 199с.
21. Ахметзянов А. В., Сальников А. М., Спиридонов С. В. Многосеточные балансовые модели нестационарных потоков в сложных газотранспортных системах //Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010. С.230-251.
22. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Расчет неустановившихся режимов течения жидкости в трубопроводных сетях //Известия Высших технических учебных заведений Азербайджана No 1(89) 2014. с.60-67.
23. Абдуллаев В.М. О применении метода прямых для краевой задачи с нелокальными условиями относительно нагруженного параболического уравнения // Известия НАНА, серия ФТМН, 2008, Т.XXVIII, №3, с.76-81.
24. Самусенко А.В., Фролова С.В. Многоточечные схемы продольного варианта метода прямых повышенной точности для решения некоторых задач математической физики //Вестн. Белорус. Ун-та. Сер.1: Физ. мат. наук. 2009, № 3, С. 31-39.

UOT-519.622.2

E.R. Əşrəfova

Ayrılmayan sərhəd şərtli bir-birindən asılı olmayan ikinci tərtib tənliklər sisteminin ədədi həlli

İşdə ayrılmayan sərhəd şərtli bir-birindən asılı olmayan ikinci tərtib adi diferensial tənliklər sisteminin ədədi həlli üçün yanaşma tədqiq olunur. Baxılan yanaşma baxılan sistemin spesifik xüsusiyyətlərini nəzərə alan sərhəd şərtinin kəsilməz köçürülməsi üsulunun analoqunun tətbiqinə əsaslanır. Məsələnin ədədi həlli üçün düsturlar alınmış, alqoritmlər işlənmişdir, ədədi eksperimentlərin nəticələri verilmişdir.

Açar sözlər: diferensial tənliklər sistemi, ayrılmayan sərhəd şərtləri, sərhəd şərtlərinin köçürülməsi, Runqe-Kutta üsulu, Koşi məsələsi

Y.R. Ashrafova

Numerical solution to the system of independent equations of the second order under unseparated boundary conditions

A numerical approach of the solution to the system of independent ordinary differential equations of the second order with unseparated boundary conditions is investigated in the work. This approach is based on the application of the analogues to the method of the transfer of boundary conditions, taking into consideration of specific characteristics of considered system. The formulas and algorithms for numerical solution to the problem, the results of numerical experiments are given.

Keywords: system of differential equations, unseparated boundary conditions, transfer of boundary conditions, Runge-Kutta method, Cauchy problem

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 16.04.14