Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-03.pdf

УДК 519.622.2

Д.А. АСАДОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Предложен численный подход к решению системы трехточечных дискретных уравнений с неразделенными краевыми условиями. Получены формулы для решения этой задачи и приводится алгоритм для применения предлагаемого метода. Приводятся результаты численного решения задачи, иллюстрирующие эффективность предлагаемого метода.

Ключевые слова: системы независимых дискретных уравнений, декомпозиция сложного объекта, неразделенные граничные условия, метод переноса краевых условий

1. Введение. В данной статье исследуется численное решение системы с большим числом независимых трехточечных дискретных уравнений с нелокальными неразделенными краевыми условиями.

Многие известные математические модели дискретных динамических моделей сложных процессов получены с использованием декомпозиции сложных объектов на более простые подобъекты с заранее известными математическими моделями, или на подобъекты, для которых несложно их построить [1], [2]. Предполагается, что декомпозиция сложного объекта проведена таким образом, что промежуточные состояния подобъектов не влияют друг на друга, а связь между подобъектами осуществляется лишь через начальные и конечные состояния подобъектов [3]-[5]. В реальности подобъекты, как правило, связаны с произвольным, но небольшим числом других подобъектов и следовательно условия, определяющие связи между подобъектами, характеризуются слабо заполненными матрицами Якоби ([6],[7]).

На практике такого рода задачи возникают при численном исследовании дискретных моделей сложных процессов, в которых составляющие их подпроцессы могут быть описаны, в частности, разностными уравнениями. При этом в общих (узловых) точках отдельных подобъектов невозможно измерить значение каждого параметра состояния подобъекта в отдельности, но известны физические закономерности, которым должны удовлетворять значения параметров в узловых точках, что приводит к неразделенности задания краевых условий. В реальной жизни такие задачи возникают при математическом моделировании процессов переноса электроэнергии в сложных системах электропередач, нестационарного движения жидкости и газа в трубопроводных системах закольцованной структуры, процессов сорбции и десорбции газов и др.

Непосредственное использование методов прогонки краевых условий для решения такого типа задач неэффективно, поскольку можно существенно ускорить их решение, используя специфику структуры задания условий.

В данной работе предложен численный подход, основанный на идее методов переноса краевых условий [8], [9], для решения систем независимых дискретных уравнений, связанных только в узловых точках краевыми условиями. Получены формулы для осуществления переноса условий, приведены результаты численных экспериментов. В качестве иллюстрации рассмотрено решение модельной задачи, возникающей при конечноразностной аппроксимации системы уравнений с частными производными гиперболического типа, описывающей движение жидкости в трубопроводе сложной закольцованной структуры.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему независимых дискретных уравнений второго порядка, описывающую сложный дискретный процесс (объект), состоящий из L взаимно независимых дискретных подпроцессов (подобъектов):

$$a^{si} y^{s\,i-1} + b^{si} y^{s\,i} + c^{si} y^{s\,i+1} = d^{s\,i}, \; i = 2,..., N_s - 1, \; s = 1,..., L. \quad (2.1)$$

Здесь значение $y^{s\,i}$ - определяет состояние $s-$го процесса в i-тый дискретный момент; $i = 1,..., N_s$; $s = 1,..., L$; $a^{si}, b^{si}, c^{si}, d^{si} -$ заданные величины, причем a^{si}, b^{si}, c^{si} отличны от нуля; $N_s -$ число шагов s-го подпроцесса.

Рассматриваемые независимые дискретные уравнения связаны между собой неразделенными краевыми условиями вида:

$$\sum_{s=1}^{L} v_1^{is} y^{s1} + \sum_{s=1}^{L} v_2^{is} y^{s2} = R_1^i, \; i = 1,..., l_1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{s=1}^{L} w_1^{is} y^{sN_s-1} + \sum_{s=1}^{L} w_2^{is} y^{sN_s} = R_2^i, \; i = 1,..., l_2, \quad (2.3)$$

или в более общем случае

$$\sum_{s=1}^{L} v_1^{is} y^{s1} + \sum_{s=1}^{L} v_2^{is} y^{s2} + \sum_{s=1}^{L} w_1^{is} y^{sN_s-1} + \sum_{s=1}^{L} w_2^{is} y^{sN_s} = R^i, \; i = 1,..., M. \quad (2.4)$$

На практике встречается задание неразделенных краевых условий как вида (2.2), (2.3), так и условий смешанного характера (2.4), при этом важное значение имеет тот факт, что их общее количество в предположении их линейной независимости должно было равно $2L$ (т.е. $l_1 + l_2 = 2L = M$).

Условия (2.4) могут быть записаны в более общем виде

$$V_1 y^1 + V_2 y^2 + W_1 y^{N-1} + W_2 y^N = R, \quad (2.5)$$

где введены следующие обозначения: V_1, V_2, W_1, $W_2 -$ заданные матрицы размерности $M \times L$, $R = \left(R^1,..., R^M\right)^* -$ заданный M-мерный вектор, $y^1 = (y^{11}, y^{21},..., y^{L1})^*$, $y^2 = (y^{12}, y^{22},..., y^{L2})^*$, $y^{N-1} = (y^{1N_1-1}, y^{2N_2-1},..., y^{LN_L-1})^*$, $y^N = (y^{1N_1}, y^{2N_2},..., y^{LN_L})^*$.

Будем предполагать, что рассматриваемая задача корректна, т.е. решение имеется и оно единственное.

Соотношения (2.1), (2.5) представляют собой математические модели многих сложных дискретно функционирующих объектов, процессов с сосредоточенными или распределенными параметрами ([8]-[13]). Для математического моделирования этих процессов был использован метод декомпозиции по временной и/или пространственной переменным, т.е. разбиения всего объекта на отдельные подобъекты, функционирование которых не зависит друг от друга, а связь осуществляется между их входными и выходными состояниями, т.е. посредством условий (2.5).

К задачам вида (2.1), (2.5) могут быть приведены также краевые задачи, описываемые системами дифференциальных уравнений с обыкновенными или частными производными, для решения которых использованы методы конечных разностей [10]. При этом сами системы уравнений состоят из отдельных дифференциальных уравнений второго порядка, связанных между собой только начальными и/или краевыми условиями. К такого рода краевым задачам приводит, в частности, исследование следующих задач: расчет разветвленной электрической цепи с помощью законов Кирхгофа, когда для узлов и контуров электрической цепи составляются уравнения по первому и второму законам Кирхгофа относительно токов и падений напряжений; расчет сложных кольцевых трубопроводов, который также производится с применением электроаналогий законов Кирхгофа, при этом для каждого узла составляется баланс расходов, а для каждого кольца (контура)- баланс напоров [11], [12]. Сам процесс движения на каждом отдельном линейном участке описывается гиперболической системой двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [12,13]. После применения метода прямых по какой-либо из переменных данные задачи приводятся к виду (2.1), (2.5).

Среди особенностей, характеризующих математические модели многих реальных больших объектов сложной структуры, можно указать следующие: 1) большое число подобъектов L; 2) слабые и произвольные взаимосвязи между подобъектами, т.е. слабую и произвольную заполненность матриц V_1, V_2, W_1, W_2; 3) большую длительность функционирования, т.е. большое число шагов N_s, $s=1,...,L$ (индивидуальную для каждого подпроцесса).

Особенности 1), 3) для реальных объектов приводят к тому, что порядок алгебраической системы (2.1), (2.5), равный $L\times\sum_{s=1}^{L}N_s$, может превышать несколько тысяч, что не позволяет применять для их решения известные численные методы решения систем алгебраических уравнений. Особенность 2) приводит к неразделенным краевым условиям, что вызывает необходимость использовать методы переноса краевых условий.

Целью данной работы является разработка эффективного численного метода решения системы независимых дискретных уравнений (2.1) при неразделенных краевых условиях (2.5) с учетом особенностей, указанных выше. Метод основан на аналоге метода переноса (прогонки) условий и сводится к решению серии специально построенных дискретных задач Коши относительно отдельных уравнений системы (2.1).

3. Численное решение задачи. Подход, предлагаемый к решению рассматриваемой задачи, основан на переносе краевых условий (2.5) в один конец: левый или правый. Это означает, что соотношения (2.4) или (2.5) будут заменены эквивалентными им соотношениями, в которых будут отсутствовать векторы y^1, y^2 при переносе условий в правый конец:

$$\widetilde{W}_1 y^{N-1}+\widetilde{W}_2 y^N=\widetilde{R}\,, \tag{3.1}$$

что более подробно можно записать как:

$$\sum_{s=1}^{L}\widetilde{w}_1^{is}y^{sN_s-1}+\sum_{s=1}^{L}\widetilde{w}_2^{is}y^{sN_s}=\widetilde{R}^i\,,\ i=1,...,M, \tag{3.2}$$

При переносе условий в левый конец будут отсутствовать векторы y^{N-1}, y^N

$$\widetilde{V}_1 y^1+\widetilde{V}_2 y^2=\widetilde{R}\,, \tag{3.3}$$

эти условия можно записать в виде:

$$\sum_{s=1}^{L}\widetilde{v}_1^{is}y^{s1}+\sum_{s=1}^{L}\widetilde{v}_2^{is}y^{s2}=\widetilde{R}^i\,,\ i=1,...,M\ . \tag{3.4}$$

После переноса условий в один конец будут получены системы (3.1), (3.2) или (3.3), (3.4), которые представляют собой системы M алгебраических уравнений с M неизвестными: y^1, y^2 или y^{N-1}, y^N. Решив эти системы и определив y^1, y^2 или y^{N-1}, y^N, решение всей поставленной задачи достигается проведением несложных расчетов по явным рекуррентным формулам (задачи Коши) относительно отдельных дискретных уравнений (2.1).

Выбор направления переноса условий (2.4), (2.5) зависит от степени заполненности матриц V_1, V_2, W_1, W_2. А именно, если по сравнению с матрицами W_1, W_2 менее заполнены матрицы V_1, V_2, то условия надо переносить вправо, и наоборот, если V_1, V_2 заполнены сильнее, чем W_1, W_2, то условия следует переносить влево. Это правило станет очевидным после нижеприведенного описания процедуры переноса.

Перенос условий (2.5), точнее (2.4), будет осуществляться для каждого i-го условия отдельно, $i = 1,...,M$.

Итак, рассмотрим произвольное i-е условие из (2.4), которое после переноса вправо примет вид (3.2), где $\tilde{w}_1^{is}$, $\tilde{w}_2^{is}$, $\tilde{R}^i$ – пока неизвестные новые значения коэффициентов. Получение условия в виде (3.2) будем проводить поэтапно.

Пусть среди коэффициентов $v_1^{is}, v_2^{is}, s = 1,...,L$, имеются ненулевые, в противном случае i-е условие переносить вправо не надо, т.к. в этом условии участвуют только значения y^{sN_s-1}, y^{sN_s}. Пусть первый отличный от нуля коэффициент есть $v_1^{ik} \neq 0$ или $v_2^{ik} \neq 0$, $1 \le k \le L$, $v_1^{is} = 0$, $v_2^{is} = 0$ для $s < k$.

Определение 1. Будем говорить, что величины α^j, λ^j и β^j, $j = 1,...,N_k$, осуществляют перенос i-го условия (2.4) по отношению k-го неизвестного y^{kj} вправо, если для всех векторов y^{kj}, удовлетворяющих k-тому уравнению системы (2.1), имеют место равенства

$$\alpha^j y^{kj} + \lambda^j y^{kj+1} + \left[\sum_{s=k+1}^{L} (v_1^{is} y^{s1} + v_2^{is} y^{s2}) + \sum_{s=1}^{L} (w_1^{is} y^{sN_s-1} + w_2^{is} y^{sN_s}) \right] = \beta^j, \ j = 1,...,N_k. \quad (3.5)$$

Ясно, что при $j = 1$ должны выполняться равенства:

$$\alpha^1 = v_1^{ik}, \ \lambda^1 = v_2^{ik}, \quad \beta^1 = R^i. \quad (3.6)$$

Величины α^j, λ^j и β^j, $j = 1,...,N_k$, удовлетворяющие (3.5), (3.6), будем называть прогоночными коэффициентами.

Подставляя в (3.5) значения прогоночных коэффициентов при $j = N_k$, получим новое условие

$$\sum_{s=k+1}^{L} v_1^{is} y^{s1} + \sum_{s=k+1}^{L} v_2^{is} y^{s2} + \sum_{s=1}^{L} \tilde{w}_1^{is} y^{sN_s-1} + \sum_{s=1}^{L} \tilde{w}_2^{is} y^{sN_s} = \tilde{R}^i, \ i = 1,...,M,$$

в котором введены обозначения

$$\tilde{w}_1^{ik} = w_1^{ik} + \alpha^{N_k}, \ \tilde{w}_2^{ik} = w_2^{ik} + \lambda^{N_k}, \quad \tilde{w}_1^{is} = w_1^{is}, \ \tilde{w}_2^{is} = w_2^{is}, \quad s = 1,...,L, \ s \neq k, \ \tilde{R}^i = \beta^{N_k}.$$

Правые прогоночные коэффициенты α^j, λ^j, β^j, производящие перенос условий (2.4) вправо, можно определить разными способами. Один из них предлагается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть величины α^j, λ^j и β^j определены следующими рекуррентными соотношениями (дискретными задачами Коши):

$$\lambda^{j+1} = -\alpha^j \big/ a^k, \quad \alpha^1 = v_1^{ik},\ \lambda^1 = v_2^{ik}, \quad j = 1,...,N_k,$$
$$\alpha^{j+1} = \lambda^j + \lambda^{j+1}\overline{b^k}, \tag{3.7}$$
$$\beta^{j+1} = \lambda^{j+1}\overline{d^k} + \beta^j, \quad \beta^1 = R^i,\ j = 1,...,N_k.$$

Тогда $\alpha^j, \lambda^j,\ \beta^j$ являются правыми прогоночными коэффициентами для i-го условия (2.4) относительно решения k-того уравнения системы (2.1).

Доказательство. Перепишем систему (2.1) в виде

$$a^{kj}y^{k\,j} + b^{kj}y^{k\,j+1} + c^{kj}y^{k\,j+2} = d^{kj},\ j = 1,...,N_k - 2,\ k = 1,...,L.$$

Отсюда

$$y^{k\,j+2} = \overline{d^{kj}} - \overline{b^{kj}}y^{k\,j+1} - \overline{a^{kj}}y^{k\,j} \text{ (так как } c^{kj} \neq 0\text{)}. \tag{3.8}$$

Используем метод математической индукции.

При $j = 1$, согласно (3.6), условие (3.5) эквивалентно i-тому условию (2.4).

Пусть $\alpha^j, \lambda^j,\ \beta^j$ при каком-либо шаге $j > 1$ удовлетворяют условию прогонки i-го условия относительно решения k-того уравнения системы (2.1), т.е. имеет место:

$$\alpha^j y^{kj} + \lambda^j y^{kj+1} + \left[\sum_{s=k+1}^{L}(v_1^{is}y^{s1} + v_2^{is}y^{s2}) + \sum_{s=1}^{L}(w_1^{is}y^{sN_s-1} + w_2^{is}y^{sN_s})\right] = \beta^j,\ j = 1,...,N_k, \tag{3.9}$$

Определим значения прогоночных коэффициентов $\alpha^{j+1}, \lambda^{j+1},\ \beta^{j+1}$ для $(j+1)$-го шага:

$$\alpha^{j+1}y^{kj+1} + \lambda^{j+1}y^{kj+2} + \left[\sum_{s=k+1}^{L}(v_1^{is}y^{s1} + v_2^{is}y^{s2}) + \sum_{s=1}^{L}(w_1^{is}y^{sN_s-1} + w_2^{is}y^{sN_s})\right] = \beta^{j+1}. \tag{3.10}$$

Учтем k-е уравнение системы (3.8) в (3.10):

$$\alpha^{j+1}y^{kj+1} + \lambda^{j+1}(\overline{d^{kj}} - \overline{b^{kj}}y^{kj+1} - \overline{a^{kj}}y^{kj}) + \left[\sum_{s=k+1}^{L}(v_1^{is}y^{s1} + v_2^{is}y^{s2}) + \sum_{s=1}^{L}(w_1^{is}y^{sN_s-1} + w_2^{is}y^{sN_s})\right] = \beta^{j+1}.$$

Из этого равенства вычтем равенство (3.9), после группировки получим:

$$[\alpha^{j+1} - \lambda^j - \lambda^{j+1}\overline{b^{kj}}]y^{kj+1} + [-\lambda^{j+1}\overline{a^{kj}} - \alpha^j]y^{kj} - [\beta^{j+1} - \lambda^{j+1}\overline{d^{kj}} - \beta^j] = 0.$$

Учитывая, что это равенство должно выполняться для всевозможных решений k-го уравнения системы (2.1), потребуем от $\alpha^{j+1}, \lambda^{j+1}, \beta^{j+1}$ выполнения равенства нулю выражений в квадратных скобках. В результате получим необходимые соотношения для прогоночных коэффициентов в виде (3.7). Теорема доказана.

Выполнив процедуру замены значений k-го коэффициента при y^{k1} и y^{k2} в i-том условии значениями $y^{k\,N_{k-1}}$ и $y^{k\,N_k}$ с новыми значениями коэффициентов $\tilde{w}_1^{k\,N_k}$, $\tilde{w}_2^{k\,N_k}$, получим новое условие, эквивалентное i-тому. В этом условии отсутствуют значения y^{k1}, y^{k2}. Далее переходим к следующим отличным от нуля коэффициентам v_1^{is}, v_2^{is}, $s > k$, пока не выполнятся условия $v_1^{is} = 0,\ v_2^{is} = 0,\quad s = 1,...,L$. Это означает, что i-е условие полностью перенесено вправо. Далее вся указанная процедура выполняется для ($i+1$)-го условия. Если $(i+1) > M$, то все условия (2.4) перенесены вправо и в результате получены условия вида (3.1) или (3.2), эквивалентные условиям (2.4).

Условия (3.1), (3.2) представляют собой систему M линейных алгебраических уравнений относительно векторов y^{N-1}, $y^N \in R^L$, после решения которой из (2.1) определяется искомое решение рассматриваемой задачи $y = \left(y^1,..., y^N\right)^*$.

Аналогично вышеприведенной процедуре переноса условий в правый конец осуществляется последовательный перенос условий в левый конец с целью получения условий (3.3) или (3.4), эквивалентных условиям (2.4).

Пусть в i-том условии среди векторов w_1^{is}, w_2^{is}, $s = 1,..., L$, первым отличным от нулевого вектора является $w_1^{ik} \neq 0$ или $w_2^{ik} \neq 0$, $1 \leq k \leq L$, $w_1^{is} = 0$, $w_2^{is} = 0$ для $s < k$.

Определение 2. Будем говорить, что величины α^j, λ^j и β^j, $j = 1,..., N_k$, осуществляют перенос i-го условия (2.4) по отношению k-го неизвестного y^{kj} влево, если для всех векторов y^{kj}, удовлетворяющих k-тому уравнению системы (2.1), имеют место равенства

$$\alpha^j y^{kj} + \lambda^j y^{kj+1} + \left[\sum_{s=1}^{L} (v_1^{is} y^{s1} + v_2^{is} y^{s2}) + \sum_{s=k+1}^{L} (w_1^{is} y^{sN_s-1} + w_2^{is} y^{sN_s})\right] = \beta^j, \ j = 1,..., N_k, \quad (3.11)$$

$$\alpha^{N_k} = w_1^{ik}, \ \lambda^{N_k} = w_2^{ik}, \quad \beta^{N_k} = R^i. \quad (3.12)$$

Ясно, что (3.11) при $j = N_k$ совпадает с i-м условием (2.4).

Если α^j, λ^j и β^j, $j = 1,..., N_k$, являются прогоночными коэффициентами, тогда из равенства (3.11) при $j = 1$ получим новое условие

$$\sum_{s=1}^{L} \tilde{v}_1^{is} y^{s1} + \sum_{s=1}^{L} \tilde{v}_2^{is} y^{s2} + \sum_{s=k+1}^{L} w_1^{is} y^{sN_s-1} + \sum_{s=k+1}^{L} w_2^{is} y^{sN_s} = \tilde{R}^i, \ i = 1,..., M,$$

эквивалентное i-му, в котором введены обозначения:

$$\tilde{v}_1^{ik} = v_1^{ik} + \alpha^1, \tilde{v}_2^{ik} = v_2^{ik} + \lambda^1, \quad \tilde{v}_1^{is} = v_1^{is}, \tilde{v}_2^{is} = v_2^{is}, \quad s = 1,..., L, \ s \neq k, \ \tilde{R}^i = \beta^1.$$

Это условие отличается от i-го условия (2.4) тем, что в его i-й части отсутствуют слагаемые с y^{kN_k-1}, y^{kN_k}. Далее эта процедура повторяется до тех пор, пока имеется хотя бы один коэффициент w_1^{is}, w_2^{is}, отличный от нулевого. После этого осуществляется перенос для следующего $(i+1)$-го условия, если $i+1 \leq M$. Левые прогоночные коэффициенты, осуществляющие перенос $i-$го условия влево, можно определить из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть величины α^j, λ^j и β^j, $j = 1,..., N_k$, определены следующими рекуррентными соотношениями (дискретными задачами Коши):

$$\alpha^{j-1} = -\lambda^j \big/ c^{kj}, \qquad \lambda^{N_k} = w_2^{ik}, \quad j = N_k - 1, N_k - 2,...,1,$$

$$\lambda^{j-1} = \alpha^j + \alpha^{j-1}\overline{b^{kj}}, \quad \alpha^{N_k} = w_1^{ik}, \quad (3.13)$$

$$\beta^{j-1} = \alpha^{j-1}\overline{d^{kj}} - \beta^{j+1}, \quad \beta^{N_k} = R^i, \quad j = N_k - 1, N_k - 2,...,1.$$

Тогда α^j, λ^j и β^j являются левыми прогоночными коэффициентами для i-го условия (2.4) относительно решения y^{kj} k-того уравнения системы (2.1).

Доказательство теоремы аналогично вышеприведенному доказательству теоремы 1.

Сам процесс приведения всех условий (2.4), (2.5) к виду (3.3), (3.4) за счет переноса значений $y^{k\,N_k-1}$, $y^{k\,N_k}$ в левый конец проводится аналогично вышеописанному процессу переноса условий вправо. После окончания процесса переноса получается система M алгебраических уравнений относительно векторов y^1, y^2. Решив эту систему, далее проводится рекуррентный расчет искомых решений $y^{k\,s}$ уравнений системы (2.1) слева направо, $s=1,...,N_k$, $k=1,...,L$.

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим следующую систему независимых дискретных уравнений, состоящую из пяти подсистем ($L=5,\;\; N_s=201,\; s=1,...,5$):

$$160400y^{1,i-1}-320000y^{1i}+159600y^{1,i+1}=-0{,}02i-2e^{0{,}005i}+2\,,\qquad i=2,...,200,$$

$$159400y^{2,i-1}-320000y^{2i}+160600y^{2,i+1}=-3{,}5e^{0{,}0025i}+9-\cos(0{,}005i)-3\sin(0{,}005i)\,,$$

$$320200y^{3,i-1}-640000y^{3i}+319800y^{3,i+1}=-1, \tag{4.1}$$

$$160200y^{4,i-1}-320000y^{4i}+159800y^{4,i+1}=1-0{,}5e^{0{,}0025i}-ih\,,$$

$$160200y^{5,i-1}-320000y^{5i}+159800y^{5,i+1}=0{,}01i-0{,}5e^{0{,}0025i}-0{,}25\times10^{-4}i^2$$

со следующими десятью неразделенными условиями, включающими состояния в начальные и конечные моменты:

$$y^{1,1}+y^{2,1}+y^{3,1}=0\,, \tag{4.2}$$

$$y^{1,2}-y^{1,1}+y^{3,1}-y^{3,2}=0\,, \tag{4.3}$$

$$y^{2,2}-y^{2,1}+y^{3,1}-y^{3,2}=0\,, \tag{4.4}$$

$$y^{4,1}=4\,, \tag{4.5}$$

$$y^{5,1}=-1\,, \tag{4.6}$$

$$y^{3,N_3}+y^{4,N_4}+y^{5,N_5}=6\sqrt{e}-1/6\,, \tag{4.7}$$

$$y^{3,N_3}-y^{3,N_3-1}-y^{5,N_5}+y^{5,N_5-1}=0\,, \tag{4.8}$$

$$y^{4,N_4}-y^{4,N_4-1}-y^{5,N_5}+y^{5,N_5-1}=0\,, \tag{4.9}$$

$$y^{1,N_1}=-1+2e\,, \tag{4.10}$$

$$y^{2,N_2}=3-2\sqrt{e}+\cos(1)\,. \tag{4.11}$$

Несложно убедиться в том, что решением задачи (4.1)-(4.11) с точностью до 10^{-8} являются векторы, компоненты которых для $i=1,...,201$ определены следующим образом

$$y^{1,i}=0{,}25\times10^{-4}(i-1)^2+2e^{0{,}005(i-1)}-2,$$

$$y^{2,i}=0{,}015(i-1)-2e^{0{,}0025(i-1)}+\cos(0{,}005(i-1)),$$

$$y^{3,i}=0{,}005(i-1)+2e^{0{,}0025(i-1)}-1, \tag{4.12}$$

$$y^{4,i}=0{,}125\times10^{-4}(i-1)^2+2e^{0{,}0025(i-1)}+2,$$

$$y^{5,i}=0{,}125\times10^{-6}(i-1)^3+2e^{0{,}0025(i-1)}-3.$$

Отметим, что система уравнений (4.1) и условия (4.2)-(4.11) получены имитацией конечноразностной аппроксимации системы дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, описывающей движение жидкости в трубопроводной сети, структура которой приведена на рис. 1.

Система (4.1) определяет режим движения только на первом временном слое в дискретных точках участков трубопровода. Все участки имеют равную длину и разбиты на 200 частей. Условия (4.2), (4.7) определяют закон материального баланса в узловых точках сети, условия (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) – характеризуют условия непрерывности потока (равенства давления в концах участков, прилегающих к узловой точке), условия (4.5), (4.6), (4.10), (4.11) определяют режимы работы внешних источников (количество притока и оттока сырья по источникам).

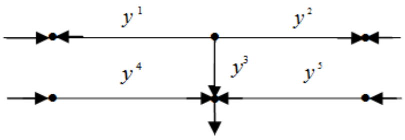

Рис.1. Условная схема трубопроводной сети

Учитывая равное число ненулевых коэффициентов при y^{s1} и y^{sN_s} в условиях (4.2) - (4.11), то направление переноса условий не имеет значения.

В результате переноса условий (4.2)-(4.6) вправо были получены условия в виде алгебраической системы (3.1), десятимерные матрицы $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ которой представлены в таблицах 1 и 2, а правая часть − вектор $\tilde{R}$ имел вид:

$$\tilde{R}^* = [0.0035\ 9.7257\ 0.0\ \ 0.0\ 0.0050\ -0.0706\ 4.4366\ 0.2429\ 0.0324\ -0.0082]$$

Решая полученную систему уравнений методом Гаусса с выбором главного члена, был найден вектор

$$y^N = (4.3998\ \ 4.4366\ \ 0.2403\ \ 0.2429\ \ 3.2771\ \ 3.2903\ \ 5.7886\ \ 5.8018\ \ 0.6203\ \ 0.6336)^*.$$

Пользуясь этим вектором, были проведены рекуррентные расчеты по нахождению y^{si}, $i = \overline{201,1}$, $s = \overline{1,5}$, из подсистем системы (4.1). Погрешность полученных результатов Δy^{si} не превышала величины

$$\max_s \max_i \left|\Delta y^{si}\right| \le 10^{-6}.$$

Таблица 1. Элементы матриц $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ системы 3.1.

	$\tilde{W}_1$					$\tilde{W}_2$				
j / i	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	-0.5501	-8.1103	-1	0	0	0.5438	8.1040	0.9936	0	0
2	0.2231	0	-1	0	0	-0.2231	0	1	0	0
3	0	33.1173	-1	0	0	0	-33.1173	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.9921	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.9921
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	-1	0	1	0	0	1	0	-1
8	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	-1
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

5. Выводы. В работе рассмотрено решение систем независимых трехточечных разностных уравнений большой размерности со «слабыми» и произвольными связями между отдельными уравнениями, приводящих к неразделенности задания краевых условий, причем матрица условий связи между уравнениями имеет слабо заполненный якобиан. С многократным решением подобных систем приходится сталкиваться при оптимизации параметров объектов сложной структуры или при дискретизации задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с обыкновенными и частными производными второго порядка. Получены схемы, соответствующие формулы, основанные на идее метода переноса условий, учитывающие особенности матрицы Якоби системы.

Приводятся результаты численных экспериментов, полученных при решении задачи по расчету режима неустановившегося движения жидкости в трубопроводной сети сложной закольцованной структуры, к которой применена неявная схема метода конечных разностей.

Литература

1. Красовский А.А. Декомпозиция и синтез субоптимальных адаптивных систем //Изв. АН СССР, Техн. кибер., 1984, №2, с. 157-165.
2. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981, 352 с.
3. Juergen Geiser. Decomposition methods for differential equations: theory and applications CRC Press 2010. p.304.
4. Efendiyev Y., Galvis J., Lazarov R.D., Margenov S., Ren J. Multiscale domain decomposition preconditioners for anisotropic high-contrast problems //Technical Report ISC-Preprint 2011-05, Institute for scientific Computation (2011).
5. Айда-заде К.Р., Али-заде Р.И., Новрузбеков И.Г., Калаушин М.А. Декомпозиционный метод анализа и синтеза плоских механизмов // «Механика машин», Москва: Наука, вып. 57, 1980.
6. Айда-заде К.Р. Исследование нелинейных оптимизационных задач сетевой структуры. //Автоматика и телемеханика, 1990, №2, с. 3-14.
7. Айда-заде К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач управления системами с распределенными параметрами // «Ж. вычисл. матем. и математической физики», Москва, 1989, № 3, с. 346-354.
8. Абдуллаев В.М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал индустриальной математики, Новосибирск, 2012, т.15, №3(51), с. 3-15.
9. Абрамов А.А., Бураго Н.Г., Дышко А.Л. и др. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач //Сообщения по программному обеспечению ЭВМ, ВЦ АН СССР, Москва, 1982, 64 с.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.
11. Ахметзянов А.В., Сальников А.М., Спиридонов С.В. Многосеточные балансовые модели нестационарных потоков в сложных газотранспортных системах //Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010, с. 230-251.
12. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975, 199 с.
13. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Исследование переходных процессов в нефтепроводах // Автоматика и телемеханика, 2011, № 12, с. 156-172.

UOT 519.622.2

C.Ə. Əsədova

Ayrılmayan sərhəd şərtli üç nöqtəli diskret bir-birindən asılı olmayan tənliklər sisteminin ədədi həlli

İşdə ayrılmayan sərhəd şərtlərinə malik üç nöqtəli diskret tənliklər sisteminin *həllinə ədədi yanaşma təklif edilmişdir. Bu məsələnin həlli üçün düsturlar alınmış və təklif edilən üsulun tətbiqi üçün alqoritm verilmişdir. Məsələnin ədədi həllinin nəticələri verilmişdir ki, bu da təklif edilən üsulun effektivliyini göstərir.*

Açar sözlər: asılı olmayan diskret tənliklər sistemi, mürəkkəb obyektin dekompozisiyası, ayrılmayan sərhəd şərtləri, sərhəd şərtinin köçürülməsi üsulu

J.A. Asadova

Numerical solution to the system of independent three-point discrete equations with non-separated boundary

conditions

In the paper the numerical approach of the solution to the system of three-point discrete equations with non-separated boundary conditions is proposed. The formulas for the solution to the stated problem are obtained and the algorithm for using of suggested approach is given. The results of numerical solution to the problem are given, which illustrate the efficiency of suggested method.

Keywords: systems of independent discrete equations, decomposition of complex object, non-separated boundary conditions, method for transfer of boundary conditions

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 24.04.2014