Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-04.pdf

УДК 519.21

Э.А. ИБАЕВ, В.М. МАМЕДОВ, Ш.Б. БАХШИЕВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА-СТИЛТЬЕСА СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВОГО МОМЕНТА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ УРОВНЯ НУЛЬ И ПЕРЕСКОКА ЧЕРЕЗ НЕГО ПРОЦЕССОМ ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

Используя последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных величин, строится процесс полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками. Находится преобразование Лапласа - Стилтьеса совместного распределения первого момента пересечения уровня нуль и перескока через этот уровень.

Ключевые слова: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, преобразование Лапласа-Стилтьеса

1. Введение. Для изучения процессов полумарковского блуждания существует ряд методов: факторизационные, асимптотические и т.д. Этими методами занимались авторы [1], [2] и другие. При помощи этих методов невозможно получить точные формулы для характеристик указанных процессов. Но сузив класс блуждания полумарковских процессов, можно найти точные формулы для их характеристик. В [3, с. 31-36] найдена производящая функция числа шагов до первого пересечения уровня нуль процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками. В работе [4, с.16-21] авторами найдено преобразование Лапласа распределения первого момента достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками и задерживающим экраном в нуле, в [5, с. 78-82] найдено преобразование Лапласа - Стилтьеса совместного распределения первого момента пересечения уровня a $(a>0)$ и перескока через него процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками.

В данной работе получено преобразование Лапласа-Стилтьеса совместного распределения первого момента пересечения уровня нуль и перескока через этот уровень полумарковским блужданием с отрицательным сносом, положительными скачками.

2. Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ задана последовательность независимых одинаково распределенных и независимых между собою случайных величин $\xi_k(\omega)$ и $\zeta_k(\omega), k=\overline{1,\infty}$ и $0<E\xi_k(\omega)<\infty,\ 0<E\zeta_k(\omega)<\infty$ и $E\xi_k(\omega)>E\zeta_k(\omega),\quad k=\overline{1,\infty}$.

Построим процесс полумарковского блуждания

$$X(t,\omega)=z-t+\sum_{i=0}^{k-1}\zeta_i(\omega),\ \text{если}\quad \sum_{i=0}^{k-1}\xi_i(\omega)\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i(\omega),$$

где, $\xi_0(\omega)=\zeta_0(\omega)=0.$

Через $\tau_0(\omega)$ обозначим момент первого пересечения уровня нуль и $\gamma_0(\omega)$-перескок через него

$$\tau_0(\omega)=\inf\{t: X(t,\omega)\le 0\}\ \text{и}\ \gamma_0(\omega)=X(\tau_0,\omega)$$

Одна из реализаций процесса $X(t,\omega)$ показана на Рис.1.

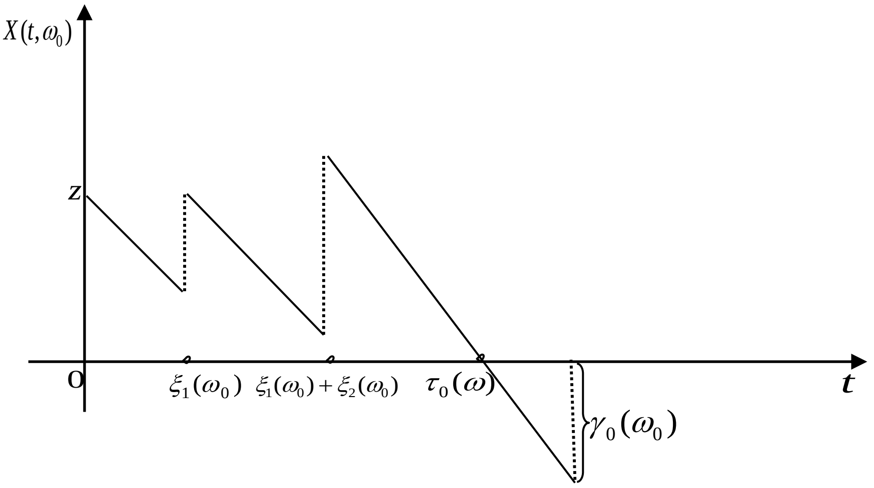

Рис.1.

Целью данной работы является нахождение преобразования Лапласа-Стилтьеса совместного распределения случайных величин $\tau_0(\omega)$ и $\gamma_0(\omega)$.

3. Метод решения. Так как процесс $X(t,\omega)$ может пересечь уровень нуль, либо при первом, либо при втором, либо при третьем и. т.д. сносах, тогда можно составить стохастическое уравнение для ($\tau_0(\omega)$, $\gamma_0(\omega)$)

$$(\tau_0,\gamma_0)=\begin{cases} z, \quad \gamma_0=\xi_1(\omega)-z; & z-\xi_1(\omega)<0, \\ \xi_1(\omega)+T(\omega), \quad \gamma_0=z-\sum_{i=1}^{\nu_0}\xi_i(\omega)+\sum_{i=1}^{\nu_0-1}\zeta_i(\omega); & z-\xi_1(\omega)>0. \end{cases} \tag{3.1}$$

где, $\tau_0 \overset{def}{=} T$,т .е τ_0 и T одинаково распределены.

Обозначим

$$L(\theta,\chi|z)=E(e^{-\theta\tau_0-\chi\gamma_0}|X(0)=z) \quad \theta>0, \quad \chi>0\cdot$$

По формуле полной вероятности имеем

$$L(\theta,\chi|z)=E(e^{-\theta\tau_0-\chi\gamma_0}|X(0)=z)=\int_{\Omega}e^{-\theta\tau_0-\chi\gamma_0}P(d\omega|X(0)=z)=\int_{z-\xi_1<0}e^{-\theta z-\chi(\xi_1(\omega)-z)}P(d\omega)+$$

$$+\int_{z-\xi_1>0}e^{-\theta(\xi_1+T)-\chi\left[z-\sum_{i=1}^{\nu_0}\xi_i(\omega)+\sum_{i=1}^{\nu_0-1}\zeta_i(\omega)\right]}P\{d\omega|X(0)=z-\xi_1+\zeta_1\}. \tag{3.2}$$

Сделаем замену переменных в (3.2)

$$\xi_i(\omega)=t_i; \quad \zeta_i(\omega)=l_i; \quad T=t.$$

После замены переменных, уравнение (3.2) примет вид:

$$L(\theta,\chi|z)=e^{-(\theta-\chi)z}\int_{t_1=z}^{\infty}e^{-\chi t_1}dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}+$$

$$+e^{-\chi z}\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_1}\int_{t_1=0}^{z}e^{-(\theta-\chi)t_1}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}dP\{T<t|X(0)=z-t_1+l_1\}\times$$

$$\times dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}dP\{\zeta_1(\omega)<l_1\}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t_2=0}^{\infty}e^{\chi t_2}dP\{\xi_2(\omega)<t_2\}\cdots\int_{t_k=0}^{\infty}e^{\chi t_k}dP\{\xi_k(\omega)<t_k\}\times$$

$$\times\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_2}dP\{\zeta_1(\omega)<l_2\}\cdots\int_{l_{k-1}=0}^{\infty}e^{-\chi l_{k-1}}dP\{\zeta_{k-1}(\omega)<l_{k-1}\}P\{\nu_0=k|X(0)=z\}. \tag{3.3}$$

Обозначим

$$L(\theta|z-t_1+l_1)=E(e^{-\theta T}|X(0)=z-t_1+l_1)=\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}dP\{T<t|X(0)=z-t_1+l_1\}.$$

$L(\theta|z-t_1+l_1)$ найдено в [4].

Если в (3.3) вместо $\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}dP\{T<t|X(0)=z-t_1+l_1\}$ подставим $L(\theta|z-t_1+l_1)$, то получим следующее:

$$L(\theta,\chi|z)=e^{-(\theta+\chi)z}\int_{t_1=z}^{\infty}e^{-\chi t_1}dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}+e^{-\chi z}\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_1}\int_{t_1=0}^{z}e^{-(\theta-\chi)t_1}L(\theta|z-t_1+l_1)\times$$

$$\times dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}dP\{\zeta_1(\omega)<l_1\}\times\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t_2=0}^{\infty}e^{\chi t_2}dP\{\xi_2(\omega)<t_2\}\cdots\int_{t_k=0}^{\infty}e^{\chi t_k}dP\{\xi_k(\omega)<t_k\}\times$$

$$\times\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_2}dP\{\zeta_1(\omega)<t_l\}\cdots\int_{l_{k-1}=0}^{\infty}e^{-\chi l_{k-1}}dP\{\zeta_{k-1}(\omega)<l_{k-1}\}P\{\nu_0=k|X(0)=z\} \tag{3.4}$$

Далее обозначим

$$\varphi_{\xi_i}(\chi)=\int_{t_i=0}^{\infty}e^{\chi t_i}dP\{\xi_i(\omega)<t_i\},$$

$$\varphi_{\zeta_i}(\chi)=\int_{t_i=0}^{\infty}e^{-\chi l_i}dP\{\zeta_i(\omega)<l_i\}. \tag{3.5}$$

В силу того, что $\xi_k(\omega), k=\overline{1,\infty}$, и $\zeta_k(\omega), k=\overline{1,\infty}$, независимы, то имеем

$$L(\theta,\chi|z)=e^{-(\theta-\chi)z}\int_{t_1=z}^{\infty}e^{-\chi t_1}dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}+$$

$$+e^{-\chi z}\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_1}\int_{t_1=0}^{z}e^{-(\theta-\chi)t_1}L(\theta|z-t_1+l_1)\times$$

$$\times dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}dP\{\zeta_1(\omega)<l_1\}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)\right]^{k-1}P\{\nu_0=k|X(0)=z\}.$$

Если $\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)<1$, то имеем

$$L(\theta,\chi|z)=e^{-(\theta-\chi)z}\int_{t_1=z}^{\infty}e^{-\chi t_1}dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}+e^{-\chi z}\int_{l_2=0}^{\infty}e^{-\chi l_1}\int_{t_1=0}^{z}e^{-(\theta-\chi)t_1}L(\theta|z-t_1+l_1)\times$$

$$\times dP\{\xi_1(\omega)<t_1\}dP\{\zeta_1(\omega)<l_1\}\frac{\psi_0\left[\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)\right]}{\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)}, \tag{3.6}$$

где

$$\psi_0(u_1u_2|z) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_1u_2)^{k-1}P\{\nu_0 = k|X(0)=z\}.$$

Чтобы получить явный вид решения (3.2) предположим, что

$$P\{\xi_1 < t\} = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & \text{если} \quad \lambda>0,\ t>0, \\ 0, & \text{если} \quad t<0. \end{cases}$$
$$P\{\zeta_1 < t\} = \begin{cases} 1-e^{-\mu t}, & \text{если} \quad \mu>0,\ t>0, \\ 0, & \text{если} \quad t<0. \end{cases} \tag{3.7}$$

В [4] при условии (3.7) найдена производящая функция распределения случайной величины ν_0

$$\psi_{\nu_0}(u|z) = ue^{M_1(u)z},$$

где

$$M_1(u) = \frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu u}}{2}.$$

В [2] при условии (3.7) найдено, что

$$L(\theta|z) = e^{K_1(\theta)z},$$

где

$$K_1(\theta) = \frac{(\lambda-\mu-\theta)+\sqrt{(\lambda-\mu-\theta)^2+4\lambda\theta}}{2}.$$

Очевидно, что

$$\psi_0[\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)|z] = \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)]^{k-1}P\{\nu_0 = k|X(0)=z\}.$$
$$\psi_0[\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)|z] = \psi_{\nu_0}(\varphi_{\xi_1}(\chi)\varphi_{\zeta_1}(\chi)|z).$$

Учитывая (3.7) в (3.5), получим, что

$$\varphi_{\xi_i}(\chi) = \int_{t_i=0}^{\infty} e^{\chi t_i}dP\{\xi_i(\omega)<t_i\} = \frac{\mu}{\chi-\mu}, \quad \chi>\mu,$$
$$\varphi_{\zeta_i}(\chi) = \int_{t_i=0}^{\infty} e^{-\chi l_i}dP\{\zeta_i(\omega)<l_i\} = \frac{\lambda}{\chi+\lambda}.$$

Подставляя значения $\varphi_{\xi_1}(\chi)$ и $\varphi_{\zeta_1}(\chi)$ в (3.6), имеем

$$L(\theta,\chi|z) = \frac{\mu}{\chi+\mu}e^{-(\mu+\theta)z} +$$
$$+\frac{\lambda\mu}{[\lambda+\chi-K_1(\theta)][\mu+\theta+K_1(\theta)-\chi]}e^{\left[M_1\left(\frac{\lambda\mu}{(\chi-\mu)(\chi+\lambda)}\right)+K_1(\theta)-\chi\right]z}\left[1-e^{-(\mu+\theta+K_1(\theta)-\chi)z}\right]$$

4. Выводы. Получено преобразование Лапласа-Стилтьеса совместного распределения первого момента пересечения уровня нуль и перескока через этот уровень процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками.

Полученный результат есть преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения периода занятости в системе массового обслуживания с одним прибором, пуассоновским поступающим потоком, экспоненциальным распределением обслуживания и ожиданием.

Литература

1. Michael Woodroof. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1982 p.118
2. Allan Gut. Stopped Random Walks Limit Theorems and Applications // Springer-Verlag. New-York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo. 1987, p 199.
3. Бабаев Ш.А. Нахождение производящей функции числа шагов до первого достижения уровня нуль полумарковского блуждания. Изв. БГУ, 2005, №1, с. 31-36.
4. Насирова Т.И., Ибаев Э.А. Явный вид преобразование Лапласа времени первого достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом положительными скачками и задерживающим экраном в нуле. Вестник БГУ, серия физ-мат. наук, 2007, № 2, с. 16-21.
5. Э.А. Ибаев. Преобразование Лапласа - Стилтьеса совместного распределения первого момента пересечения уровня a $(a > 0)$ и перескока через него. Известия АН. АзР, серия физ-тех. и мат. наук. Информатика и проблемы управления, т.XXXII, № 6, 2012, с.78-82.

UOT 515.21

E.A. İbayev, V.M. Məmmədov, Ş.B. Bakşiyev

Mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı Semimarkov dolaşma prosesinin birinci dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anının və aşmasının boyunun birgə paylanmasının Laplas-Stilties çevirməsi

Verilmiş ikiölçülü asılı olmayan eyni qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığından istifadə edərək mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı Semimarkov dolaşma prosesi qurulur. Sonra bu prosesin birinci dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anı və aşmanın boyunun birgə paylanmasının Laplas-Stilties çevirməsi tapılır.

Açar sözlər: təsadüfi kəmiyyətlər, Semimarkov dolaşma prosesi, Laplas-Stilties çevirməsi

E.A. Ibayev, V.M. Mammadov, Sh.B. Bakhshiyev

The Laplace-Stiltjes transform of compatible distribution of the first reaching moment to level zero and length of jump from the level of the Semimarkov random walk process with negative drift, positive jumps

Using sequence of independent identically distributed two-dimensional random variables, a Semimarkov random walk process with negative drift, positive jumps is constructed. The Laplace-Stiltjes transform of a compatible distribution of the first reaching moment to level zero and length of jump from the level of constructed process is obtained.

Keywords: random variables, Semimarkov random walk process, Laplace-Stiltjes transform

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Представлено 27.06.14