Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-05.pdf

УДК 517.929

К.Б. МАНСИМОВ, М.Я. НАДЖАФОВА

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается многоточечная краевая задача для системы линейных неоднородных разностных уравнений. Получено представление решения краевой задачи.

Ключевые слова: линейные неоднородные разностные уравнения, нелокальная краевая задача, представление решения

1. Введение. При исследовании задач оптимального управления различными разностными уравнениями большую роль играют формулы представления решений соответствующих линеаризованных систем (см. напр. [1-4]). В работах [1-4], получены представления решений различных линейных разностных уравнений в случае локальных краевых условий. Но многие процессы в механике, технике, экономике описываются уравнениями с нелокальными краевыми условиями (см. напр. [6-12] и на соответствующие ссылки там). Исходя из этого, в настоящей работе рассматривается задача, связанная с представлением решения одной многоточечной краевой задачи для линейного неоднородного разностного уравнения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$x(t+1)=A(t)x(t)+f(t),\quad t\in T=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\}, \tag{2.1}$$

с краевым условием

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} B(t)x(t)=\ell\,. \tag{2.2}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – заданные $(n\times n)$ дискретные матричные функции, $f(t)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, ℓ – заданный постоянный n-мерный вектор, t_0, t_1 – заданные числа, причем разность t_1-t_0 – есть натуральное число.

Задача (2.1)-(2.2) есть многоточечная краевая задача для линейных неоднородных разностных уравнений. Для уравнения (2.1) имеются различные представления решений в случае аналога задачи Коши (см. напр. [1-4]).

В настоящей заметке получено представление решения задачи (2.1)-(2.2).

2. Основные результаты. Получим представление решения задачи (2.1)-(2.2).

Пусть $F(t,\tau)$ $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} &F(t,\tau-1)=F(t,\tau)A(\tau),\\ &F(t,t-1)=E, \end{aligned} \tag{3.1}$$

(E – $(n\times n)$ единичная матрица)

Тогда решение уравнения (2.1) с начальным условием

$$x(t_0)=x_0 \tag{3.2}$$

можно записать в виде [1-4]

$$x(t)=F(t,t_0-1)x(t_0)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)f(\tau)\,. \tag{3.3}$$

Из (2.2) ясно, что

$$B(t_0)x(t_0)=\ell-\sum_{s=t_0+1}^{t_1}B(s)x(s). \tag{3.4}$$

С учетом (3.3) из (3.4) имеем

$$B(t_0)x(t_0)=\ell-\sum_{s=t_0+1}^{t_1}B(s)\left[F(s,t_0-1)x(t_0)+\sum_{\tau=t_0}^{s-1}F(s,\tau)f(\tau)\right],$$

$$B(t_0)x(t_0)=\ell-\sum_{s=t_0+1}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)x(t_0)-\sum_{s=t_0+1}^{t_1}B(s)\left[\sum_{\tau=t_0}^{s-1}F(s,\tau)f(\tau)\right].$$

Таким образом,

$$\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)x(t_0)=\ell-\sum_{s=t_0+1}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{s-1}B(s)F(s,\tau)f(\tau)\right]. \tag{3.5}$$

Умножая обе части соотношения (3.5) слева на матрицу

$$\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)\right]^{-1}$$

имеем

$$x(t_0)=\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)\right]^{-1}\ell-\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)\right]^{-1}\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{s-1}B(s)F(s,\tau)f(\tau)\right]\right]. \tag{3.6}$$

Подставим выражение $x(t_0)$, определяемое формулой (3.6), в представление (3.3). Имеем

$$x(t)=F(t,t_0-1)\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)\right]^{-1}\ell- \tag{3.7}$$

$$-F(t,t_0-1)\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}B(s)F(s,t_0-1)\right]^{-1}\left[\sum_{s=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{s-1}B(s)F(s,\tau)f(\tau)\right]\right]+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)f(\tau).$$

Эта формула и есть представление решения краевой задачи (2.1)-(2.2).

Теорема 3.1. Пусть $F(t,\tau)$ $(n\times n)$ функция, являющаяся решением задачи (3.1). Тогда решение краевой задачи (2.1)-(2.2) может быть представлено в виде (3.7).

Рассмотрим один частный случай. Предположим, что при $t=t_0+1,t_0+2,...,t_1-1$, $B(t)=0$, т.е. рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$x(t+1)=A(t)x(t)+f(t),\quad t=t_0,t_0+1,...,t_1-1, \tag{3.8}$$

$$B(t_0)x(t_0)+B(t_1)x(t_1)=\ell. \tag{3.9}$$

В случае задачи (3.8)-(3.9) из представления (3.7) получаем

$$x(t)=F(t,t_0-1)[B(t_0)F(t_0,t_0-1)+B(t_1)F(t_1,t_0-1)]^{-1}\ell-$$

$$-F(t,t_0-1)[B(t_0)F(t_0,t_0-1)+B(t_1)F(t_1,t_0-1)]^{-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}B(t_1)F(t_1,\tau)f(\tau)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)f(\tau).$$

Следовательно,

$$x(t) = F(t, t_0 - 1)[B(t_0) + B(t_1)F(t, t_0 - 1)]^{-1} \ell -$$
$$- F(t, t_0 - 1)[B(t_0) + B(t_1)F(t_1, t_0 - 1)]^{-1} B(t_1) \sum_{\tau = t_0}^{t_1 - 1} F(t_1, \tau) f(\tau) + \sum_{\tau = t_0}^{t-1} F(t, \tau) f(\tau). \qquad (3.10)$$

Представление (3.10) совпадает с представлением решения краевой задачи (3.8), (3.9), приведенным в [5, с. 74].

4. Заключение. Рассматривается нелокальная краевая задача для линейного неоднородного разностного уравнения. Получено представление решения рассматриваемой краевой задачи.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. «Оптимизация линейных систем». Мн. 1973, 256 с.
2. Гайшун И.В. «Многопараметрические системы управления». Мн. Наука и технка, 1996. 199с.
3. Мансимов К.Б. «Дискретные системы». Баку. Изд-во Бакинского Госуниверситета. 2013, 136 с.
4. Гайшун И.В. «Системы с дискретным временем». Минск. Институт Математики НАН Беларуси. 2000, 400 с.
5. Мансимов К.Б. «Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче управления с нелокальными краевыми условиями» // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». 2012, № 5, с . 71-79.
6. Гусев Е.Л. «Математические методы синтеза слоистых структур». Новосибирск: Наука, 1993.
7. Бабе Г.Б., Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. «Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям» // ДАН СССР. 1983, т. 269, № 2, с. 311-314.
8. Васильева О.О., Мизуками К. «Динамические процессы, описываемые краевой задачей; необходимые условия оптимальности и методы решения» // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000, №1, с. 95-100.
9. Krall A.M. «The development of general difference and differential-boundary systems» // Rocky Mountain J. of Math. 1975, v. 5, pp. 493-542.
10. Самойленко А.М., Ронто Н.И. «Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач». Киев. Наукова думка, 224 с.
11. И.Т. Кигурадзе. «Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений» // Итоги Науки и техники. Сер. Соврем. проб. мат. нов. достижения. 1987, т. 30, с. 3-153.
12. Абдуллаев В.М. «Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями» // Сибирский ж. индуст. мат. 2012, т. XV, № 3 (51), с. 3-15.

UOT 517.929

K.B. Mənsimov, M.Y. Nəcəfova

Xətti, bircins olmayan fərq tənliklər sistemi üçün bir sərhəd məsələsi haqqında

Məqalədə xətti bircins olmayan fərq tənliklər sistemi üçün qoyulmuş bir çoxnöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Həllin göstərilişi tapılmışdır.

Açar sözlər: xətti, bircins olmayan fərq tənliklər sistemi, lokal olmayan sərhəd məsələsi, həllin göstərilişi

K.B. Mansimov, M.Y. Najafova

On one boundary value problem for a system of linear, nonhomogeneous differential equations

In the paper, a multipoint boundary value problem for a system of linear, nonhomogeneus differential equations is considered. A representation of the solution is found.

Keywords: system of linear, nonhomogeneus differential equations, nonlocal boundary value problem, representation of solution

Бакинский Государственный Университет
Институт Систем Управления НАН Азербайджана

Представлено 29.09.14