Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-07.pdf

УДК 519.8

С.Е. БУХТОЯРОВ, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА И КРАЙНЕГО ПЕССИМИЗМА

Рассматривается бикритериальная инвестиционная Булева задача с противоречивыми критериями эффективности и риска, состоящая в поиске множества Парето. Исследуется тот тип устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу многозначного отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие множество Парето. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи в случае, когда в пространстве параметров задана произвольная метрика Гельдера l_p, $1 \le p \le \infty$.

Ключевые слова: бикритериальность, инвестиционный портфель, критерий крайнего оптимизма (MAXMAX), критерий крайнего пессимизма (MINMAX), множество Парето, радиус устойчивости задачи, метрика Гельдера

1. Введение. Настоящая работа лежит в русле направления, связанного с использованием количественных характеристик устойчивости всего множества Парето векторных задач дискретной оптимизации. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости задачи, определяется как предельный уровень возмущений ее параметров, неприводящих к появлению новых оптимумов Парето. Здесь устанавливаются нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости бикритериальной задачи формирования портфеля инвестора с противоречивыми критериями крайнего оптимизма для доходности и крайнего пессимизма для риска упущенной выгоды. При этом анализ устойчивости инвестиционной задачи к возмущениям исходных данных (оценок эффективности инвестиционных проектов и меры риска) проводится в предположении, что в пространствах проектов, состояний финансового рынка и критериальном пространстве задана произвольная метрика Гельдера l_p, $1 \le p \le \infty$. Ранее аналогичные результаты были получены в [1-4] лишь в некоторых частных случаях, когда в трехмерном пространстве параметров инвестиционной задачи с критериями Вальда и Сэвиджа задавались линейная l_1 и чебышевская l_∞ метрики в различных комбинациях.

В работах [5-10] исследована устойчивость фиксированных Парето-оптимальных и лексикографически оптимальных портфелей многокритериальных инвестиционных задач. Получены нижние и верхние оценки радиуса устойчивости таких портфелей. Обзор этих результатов содержится в [11].

2. Постановка задачи и основные определения. Согласно фундаментальным свойствам современного финансового рынка основная цель для всякого инвестора – формирование такого портфеля ценных бумаг (инвестиционного портфеля), который устраивал бы его по ожидаемой доходности и уровню риска. С использованием этих двух показателей (доход – риск) могут быть сформулированы различные оптимизационные (многокритериальные) модели нахождения «наилучших» портфелей в зависимости от вида критериев и выбранного принципа оптимальности.

Поскольку каждый инвестор пытается сформировать портфель ценных бумаг с возможно большей ожидаемой доходностью и возможно меньшим риском, то при построении модели управления инвестициями, основанной на теории Марковица [12], зададим разнородные критерии крайнего оптимизма по эффективности портфеля и крайнего пессимизма по риску упущенной выгоды. Введем ряд необходимых обозначений.

Пусть известны m возможных состояний финансового рынка $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ и n

альтернативных инвестиционных проектов $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Пусть $x_j = 1$, если проект B_j реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Инвестиционным портфелем назовем Булевый вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Через $X \subset \mathbf{E}^n$, где $\mathbf{E} = \{0,1\}$, $|X| > 1$, будем обозначать множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т.е. тех, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора.

Для каждого состояния рынка A_i инвестиционный портфель $x \in X$ будем оценивать двумя показателями (аддитивными функциями) – эффективность и риск:

$$\sum_{j \in N_n} e_{ij} x_j \ \text{ и } \ \sum_{j \in N_n} r_{ij} x_j ,$$

где $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; e_{ij} – ожидаемая оценка эффективности (чистый доход) проекта B_j в случае, когда рынок находится в состоянии A_i, $i \in N_m$; r_{ij} – мера риска, которому подвергается инвестор, выбирая проект B_j при состоянии рынка A_i. Таким образом, исходными данными задачи являются две матрицы – матрица эффективности $E = [e_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и матрица рисков $R = [r_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Желание инвестора иметь наиболее прибыльный портфель всегда вступает в противоречие с желанием обеспечить вложения с наименьшим риском. Эти обстоятельства вместе с неустойчивостью экономической ситуации, недостаточной осведомленностью об условиях, в которых будет проходить выбор проектов, приводит к необходимости использования двух широко известных в теории принятия решений критериев – крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\text{MAXMAX} \qquad e(x, E) = \max_{i \in N_m} e_i x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ij} x_j \to \max_{x \in X} ,$$

$$\text{MINMAX} \qquad r(x, R) = \max_{i \in N_m} r_i x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ij} x_j \to \min_{x \in X} ,$$

где $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ и $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})$ – i-е строки матриц E и R соответственно. С помощью первого критерия (MAXMAX) азартный инвестор оптимизирует эффективность портфеля $e_i x$ в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно тогда, когда эффективность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимиста: «или пан или пропал», «кто не рискует, тот не выигрывает» и т.п. Следует заметить, что в экономике ситуации, требующие такого поведения, нередки. В них могут оказаться не только крайние оптимисты, но и инвесторы, поставленные в безвыходное положение. Второй критерий «узкого места» (MINMAX) в литературе обычно называется критерием Сэвиджа [13]. Очевидно, что, следуя этому критерию, инвестор, предвидя непредсказуемость сценария событий, проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя свой выбор в самом невыгодном для него состоянии. Подобный пессимистический подход в оценке рыночной ситуации целесообразно использовать тогда, когда речь идет о необходимости достижения гарантированного результата. Объединение предложенных критериев приводит к бикритериальной инвестиционной задаче $Z(E, R)$ выбора проектов, под которой будем понимать задачу поиска множества Парето (множества Парето-оптимальных портфелей):

$$P(E, R) = \{x \in X : \quad X(x, E, R) = \varnothing\},$$

где

Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-07.pdf

$$X(x,E,R)=\{x'\in X: e(x,E)\le e(x',E)\ \ \&\ \ r(x,R)\ge r(x',R)\ \ \&\ \ f(x,E,R)\ne f(x',E,R)\},$$
$$f(x,E,R)=\big(e(x,E),r(x,R)\big).$$

Для исследования количественной характеристики устойчивости задачи $Z(E,R)$ к возмущениям параметров (элементов матриц E и R) необходимо задать метрику. Пусть $D=\left[d_{ij}\right]\in\mathbf{R}^{m\times n}$ – любая из матриц E или R. В пространствах инвестиционных проектов $\mathbf{R}^n$ и состояний финансового рынка $\mathbf{R}^m$ зададим произвольную метрику Гельдера l_p, $1\le p\le\infty$, т.е. под нормой матрицы $D=\left[d_{ij}\right]\in\mathbf{R}^{m\times n}$ со строками $d_i=\left(d_{i1},d_{i2},\ldots,d_{in}\right)$, $i\in N_m$ будем понимать число

$$\|D\|_p=\left\|\left(\|d_1\|_p,\|d_2\|_p,\ldots,\|d_m\|_p\right)\right\|_p,$$

где

$$\|d_1\|_p=\begin{cases}(\sum\limits_{i\in N_n}|d_{ij}|^p)^{1/p}, & \text{если } 1\le p<\infty,\\ \max\left\{|d_{ij}|:\ j\in N_n\right\}, & \text{если } p=\infty,\end{cases}\qquad i\in N_m.$$

Легко видеть, что

$$\|d_i\|_p\le\|D\|_p,\quad i\in N_m,\quad p\in[1,\infty]. \tag{2.1}$$

Наряду с числом $p\in[1,\infty]$ будем применять и понятие сопряженного с ним числа q, которое определяется равенством

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

причем $q=1$, если $p=\infty$, и $q=\infty$, если $p=1$. Поэтому в дальнейшем считаем, что областью изменений чисел p и q является отрезок $[1,\infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями. В этих предположениях будем допускать, что $\dfrac{1}{p}=0$ при $p=\infty$.

Используя (2.1) и известное неравенство Гельдера

$$a^Tb\le\|a\|_p\|b\|_q,$$

где $a,b\in\mathbf{R}^n$, легко убедиться, что при любых $x,x'\in X$ и $i,i'\in N_m$, для всякой матрицы $D\in\mathbf{R}^{m\times n}$ справедливо неравенство

$$d_ix-d_{i'}x'\ge-\|D\|_p\|x+x'\|_1^{1/q}. \tag{2.2}$$

Действительно, если $i=i'$, то

$d_ix-d_{i'}x'\ge-\|d_i\|_p\|x-x'\|_q\ge-\|D\|_p\|x-x'\|_q=-\|D\|_p\left(\sum\limits_{j\in N_n}\left|x_j-x'_j\right|\right)^{1/q}\ge-\|D\|_p\|x+x'\|_1^{1/q}$. Если $i\ne i'$,

то

$$d_ix-d_{i'}x'\ge-\left(\|d_i\|_p\|x\|_q+\|d_{i'}\|_p\|x'\|_q\right)\ge-\left\|\left(\|d_i\|_p,\|d_{i'}\|_p\right)\right\|_p\left\|\left(\|x\|_q,\|x'\|_q\right)\right\|_q\ge$$
$$\ge-\|D\|_p\left\|\left(\|x\|_q,\|x'\|_q\right)\right\|_q=-\|D\|_p\|x+x'\|_1^{1/q}.$$

Кроме того, легко видеть, что для вектора $a=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)^T\in\mathbf{R}^n$ с условием

$a_i \in \mathbf{R},\ |a_i| = \alpha,\ i \in N_n$, при любом числе $p \in [1,\infty]$ справедливо равенство

$$\|a\|_p = \alpha n^{1/p}. \tag{2.3}$$

Следуя [1-4], радиусом устойчивости бикритериальной инвестиционной задачи $Z(E,R)$ назовем число

$$\rho = \rho(m,n,p) = \begin{cases} \sup \Xi_p, & \text{если} \quad \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi_p = \left\{ \varepsilon > 0 :\ \forall (E',R') \in \Omega_p(\varepsilon) \left(P(E+E',R+R') \subseteq P(E,R) \right) \right\},$$

$$\Omega_p(\varepsilon) = \left\{ (E',R') \in \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^{m\times n} :\ \left\| \left(\|E'\|_p, \|R'\|_p \right) \right\|_p < \varepsilon \right\}.$$

Здесь $\Omega_p(\varepsilon)$ – множество пар возмущающих матриц, $P(E+E',R+R')$ – множество Парето возмущенной задачи $Z(E+E',R+R')$. Тем самым, в бикритериальном пространстве $\mathbf{R}^2$ также задана метрика Гёльдера.

Итак, радиус устойчивости задачи $Z(E,R)$ – это предельный уровень возмущений элементов матриц E и R в метрическом пространстве, не приводящих к появлению новых Парето-оптимальных портфелей. Ясно, что при выполнении равенства $P(E,R) = X$ радиус устойчивости задачи $Z(E,R)$ можно считать бесконечно большим. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z(E,R)$, для которой множество $X \setminus P(E,R)$ не пусто, будем называть нетривиальной.

3. Оценки радиуса устойчивости. Для нетривиальной задачи $Z(E,R)$ введем обозначения

$$\varphi = \varphi(m,n,p) = \min_{x \notin P(E,R)} \max_{x' \in P(x,E,R)} \frac{\gamma(x,x')}{\|x+x'\|_1^{1/q}},$$

$$\psi = \psi(m,n,s) = \min_{x \notin P(E,R)} \max_{x' \in P(x,E,R)} \frac{\gamma(x,x')}{\|x-x'\|_1},$$

где

$$\gamma(x,x') = \min\{e(x',E) - e(x,E),\ r(x,R) - r(x',R)\},$$

$$P(x,E,R) = P(E,R) \cap X(x,E,R).$$

Очевидно, что φ и ψ – неотрицательные числа.

Теорема. При любых числах $m,n \in \mathbf{N}$ и $p \in [1,\infty]$ для радиуса устойчивости $\rho(m,n,p)$ нетривиальной бикритериальной инвестиционной задачи $Z(E,R)$ справедливы следующие оценки

$$\varphi(m,n,p) \le \rho(m,n,p) \le (2mn)^{1/p} \psi(m,n).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \ge \varphi$. Это неравенство очевидно, если $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$ и пусть пара возмущающих матриц $(E',R') \in \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^{m\times n}$ со строками $e'_i \in \mathbf{R}^n$ и $r'_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m$, принадлежит множеству $\Omega_p(\varphi)$, т.е. $\left\| \left(\|E'\|_p, \|R'\|_p \right) \right\|_p < \varphi$. Поэтому ввиду (2.1) имеем

$$\|E'\|_p < \varphi, \quad \|R'\|_p < \varphi \tag{3.1}$$

Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \notin P(E,R)$ существует такой портфель $x^0 \in P(x,E,R)$, что

$$\gamma(x,x^0) \geq \varphi \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q},$$

т.е. выполняются неравенства

$$e(x^0,E) - e(x,E) \geq \varphi \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q},$$

$$r(x,E) - r(x^0,E) \geq \varphi \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q}.$$

Отсюда, учитывая (2.2) и (3.1), для любой пары матриц $(E',R') \in \Omega_p(\varphi)$ выводим

$$e(x^0, E+E') - e(x, E+E') = \max_{i \in N_m}(e_i + e_i')x^0 - \max_{i \in N_m}(e_i + e_i')x =$$

$$= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m}(e_{i'}x^0 + e_{i'}'x^0 - e_i x - e_i' x) \geq e(x^0,E) - e(x,E) - \left\| E' \right\|_p \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\varphi - \left\| E' \right\|_p\right) \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q} > 0,$$

$$r(x, R+R') - r(x^0, R+R') = \min_{i \in N_m}(r_i + r_i')x^0 - \min_{i \in N_m}(r_i + r_i')x =$$

$$= \max_{i' \in N_m} \min_{i \in N_m}(r_i x - r_i' x - r_{i'} x^0 - r_{i'}' x^0) \geq r(x,R) - r(x^0,R) - \left\| R' \right\|_p \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q} \geq --$$

$$\geq \left(\varphi - \left\| R' \right\|_p\right) \left\| x + x^0 \right\|_1^{1/q} > 0.$$

Т.е. портфель $x \notin P(E+E', R+R')$. Резюмируя и учитывая $x \notin P(E,R)$, заключаем, что

$$\forall (E',R') \in \Omega_p(\varphi) \quad \left(P(E+E',R+R') \subseteq P(E,R)\right).$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho \geq \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho \leq (2mn)^{1/p}\psi$. Согласно определению числа ψ существует такой портфель $x^* \notin P(E,R)$, что для любого портфеля $x \in P(x^*,E,R)$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$e(x,E) - e(x^*,E) \leq \psi \left\| x - x^* \right\|_1, \tag{3.2}$$

$$r(x^*,E) - r(x,E) \leq \psi \left\| x - x^* \right\|_1. \tag{3.3}$$

Полагая $\varepsilon > \psi(2mn)^{1/p}$, зададим элементы пары возмущающих матриц $E^0 = \left[e_{ij}^0\right] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и $R^0 = \left[r_{ij}^0\right] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ со строками e_i^0 и r_i^0, $i \in N_m$ по формулам

$$e_{ij}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad i \in N_m,\ x_j^* = 1, \\ -\delta & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad i \in N_m,\ x_j^* = 1, \\ -\delta & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\varepsilon \big/ (2mn)^{1/p} > \delta > \psi .$$

Тогда, используя (2.3), получаем

$$\left\| e_i^0 \right\|_p = \delta n^{1/p},\ i \in N_m,$$

$$\left\| E^0 \right\|_p = \delta (mn)^{1/p},$$

$$\left\| r_i^0 \right\|_p = \delta n^{1/p},\ i \in N_m,$$

Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-07.pdf

$$\left\|R^0\right\|_p = \delta\left(mn\right)^{1/p},$$

$$\left\|\left(\left\|E^0\right\|_p,\ \left\|R^0\right\|_p\right)\right\|_p \le \delta\left(2mn\right)^{1/p} < \varepsilon .$$

Поэтому $(E^0, R^0) \in \Omega_p(\varepsilon)$. Кроме того, все строки $e_i^0,\ i \in N_m$ матрицы E^0 одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Положив $A = e_i^0,\ i \in N_m$, при любом портфеле $x \ne x^*$ имеем

$$\left\|A\right\|_p = \delta n^{1/p},$$

$$e(x,E^0) - e(x^*,E^0) = A(x - x^*) = -\delta\left\|x - x^*\right\|_1 < 0. \tag{3.4}$$

Аналогично рассуждая и положив $B = r_i^0,\ i \in N_m$, выводим

$$\left\|B\right\|_p = \delta n^{1/p},$$

$$r(x^*,E^0) - e(x,E^0) = B(x^* - x) = -\delta\left\|x^* - x\right\|_1 < 0. \tag{3.5}$$

Альтернатива (3.2) или (3.3) приводит к необходимости рассмотрения двух вариантов.

1. Пусть выполняется неравенство (3.2). Тогда ввиду (3.4) получаем

$$e(x,E+E^0) - e(x^*,E+E^0) = \max_{i \in N_m}(e_i + e_i^0)x - \max_{i \in N_m}(e_i + e_i^0)x^* = \min_{i \in N_m}\max_{i' \in N_m}(e_{i'}x + e_{i'}^0 x - e_i x^* - e_i^0 x^*) \le$$

$$\le \min_{i \in N_m}\max_{i' \in N_m}(e_{i'}x - e_i x^*) + A(x - x^*) = e(x,E) - e(x^*,E) + A(x - x^*) = (\psi - \delta)\left\|x - x^*\right\|_1 < 0.$$

В результате выводим

$$\forall x \in P(x^*,E,R) \quad \left(x \notin X(x^*, E+E^0, R+R^0)\right). \tag{3.6}$$

Если $X(x^*, E+E^0, R+R^0) = \varnothing$, то очевидно, что $x^* \in P(E+E^0, R+R^0)$.

Допустим теперь, что $X(x^*, E+E^0, R+R^0) \ne \varnothing$. Тогда благодаря конечности множества $P(E+E^0, R+R^0)$ оно внешне устойчиво (см., например, [14, 15]). Поэтому найдется портфель $x^0 \in P(x^*, E+E^0, R+R^0)$. Покажем, что $x^0 \notin P(E,R)$.

Пусть, напротив, $x^0 \in P(E,R)$. Тогда согласно (3.6) выполняется включение

$$x^0 \in P(E,R) \setminus P(x^*,E,R).$$

Поэтому возможны лишь два следующих случая.

Случай 1. $f(x^0,E,R) = f(x^*,E,R)$. Тогда согласно (3.4) и (3.5) соответственно имеем

$$e(x^0,E+E^0) - e(x^*,E+E^0) = e(x^0,E) - e(x^*,E) + A(x^0 - x^*) < 0,$$

$$r(x^*,R+R^0) - r(x^0,R+R^0) = r(x^*,R) - r(x^0,R) + B(x^* - x^0) < 0.$$

Случай 2. Выполняется одно из неравенств

$$e(x^0,E) < e(x^*,E) \ \vee\ r(x^0,R) > r(x^*,R).$$

Если выполняется первое неравенство, то, вновь применяя (3.4), получаем

$$e(x^0,E+E^0) - e(x^*,E+E^0) = e(x^0,E) - e(x^*,E) + A(x^0 - x^*) < 0.$$

Если выполняется неравенство $r(x^0,R) > r(x^*,R)$, то аналогично, используя (3.5), получаем

$$r(x^*,R+R^0) - r(x^0,R+R^0) < 0.$$

Резюмируя, заключаем, что и в первом и во втором случаях получены противоречия включению $x^0 \in P(x^*, E+E^0, R+R^0)$. В результате доказано, что $x^0 \notin P(E,R)$.

Итак, в случае, когда выполняется неравенство (3.2), при любом числе $\varepsilon > (2mn)^{1/p}\psi$ гарантируется существование такой пары возмущающих матриц $(E^0,R^0) \in \Omega_p(\varepsilon)$, что найдется портфель (x^* или x^0), который одновременно, не являясь Парето-оптмальным портфелем задачи $Z(E,R)$, становится таковым в возмущенной задаче $Z(E+E^0, R+R^0)$, т.е. справедлива формула

$$\forall \varepsilon > (2mn)^{1/p}\psi \quad \exists (E^0, R^0) \in \Omega_p(\varepsilon) \quad \left(P(E+E^0, R+R^0) \not\subseteq P(E,R)\right). \qquad (3.7)$$

Следовательно, $\rho \le (2mn)^{1/p}\psi$.

2. Доказательство формулы (3.7) в случае, когда выполняется неравенство (3.3), проводится аналогичным образом.

Теорема доказана.

4. Выводы. Из полученных результатов следует, что с возрастанием числа p от 1 до ∞ верхняя оценка радиуса устойчивости $\rho(m,n,p)$ задачи $Z(E,R)$ уменьшается в $2mn$ раз, т.е. от числа $2mn\psi(m,n)$ до числа $\psi(m,n)$. При этом нижняя оценка также убывает от числа

$$\varphi(m,n,1) = \min_{x \notin P(E,R)} \max_{x' \in P(x,E,R)} \gamma(x,x')$$

до числа

$$\varphi(m,n,\infty) = \min_{x \notin P(E,R)} \max_{x' \in P(x,E,R)} \frac{\gamma(x,x')}{\|x+x'\|_1}.$$

Кроме того, легко видеть, что в случае, когда для любой пары портфелей $x \notin P(E,R)$ и $x' \in P(x,E,R)$ выполняется равенство

$$\left\{ j \in N_n : \quad x_j = x'_j = 1 \right\} = \varnothing,$$

справедлива формула

$$\rho(m,n,\infty) = \varphi(m,n,\infty) = \psi(m,n),$$

свидетельствующая о достижимости нижней и верхней оценок радиуса устойчивости при $\rho = \infty$.

**** Работа выполнена в рамках совместного белорусско-украинского научного проекта Ф13К-078, поддержанного Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований и Государственным фондом фундаментальных исследований Украины***

Литература

1. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 3.– С. 68–77.
2. Емеличев В. А., Коротков В. В. Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискретная математика. –2012. – Т. 24, вып. 3. – С. 3–16.
3. Emelichev V., Korotkov V. On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. – 2011. – No. 1 (65). – P. 83–94.
4. Емеличев В. А., Коротков В. В. О мере устойчивости многокритериальной инвестиционной задачи с критериями эффективности Вальда // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. – 2012. – Т. 32, № 6. – С. 88–98.
5. Емеличев В. А., Коротков В. В. Об устойчивости оптимального портфеля инвестиционной задачи Марковица с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. – 2011. – Т. 31, № 6. – С. 27–34.
6. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа // Дискретная математика. – 2011. – Т. 23, вып. 4. – С. 33–38.
7. Емеличев В. А., Коротков В. В. Постоптимальный анализ бикритериальной булевой задачи выбора инвестиционных проектов с критериями Вальда и Сэвиджа // Изв. РАН. Теория и сист. управления. – 2013. – № 4. – С. 109–118.
8. Емеличев В. А., Шацов Р. П. Инвестиционная булева задача Марковица в условиях неопределенности, многокритериальности и риска // Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 2 (20). – С. 115–122.

9. Емеличев В. А., Коротков В. В. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях риска и неопределенности // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. – 2013. – Т. 33, № 3. – С. 51–58.
10. Emelichev V., Korotkov V., Nikulin Yu. Post-optimal analysis for Markowitz multicriteria portfolio optimization problem // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2014. – V. 21. – P. 95–100.
11. Емеличев В. А., Котов В.М., Кузьмин К.Г., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 1. – С. 53–67.
12. Markowitz H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York: Willey. 1991.
13. Savage L. J. The Foundations of Statistics. New York: Dover. 1972.
14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. 1982.
15. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Second edition. Berlin-Heidelberg: Springer. 2005.

UOT 519.8

S.Y. Buxtoyarov, V.A. Yemeliçev

Son optimizm və son pessimizm meyarlı çanta məsələlərinin optimallaşdırılmasının dayanıqlıq radiusunun qiymətləndirilməsi

Pareto oxluğunda axtarış nəticəsində səmərəliliyinə riskin ziddiyyətli meyarları ilə bikriterial investisiyalı Bul məsələsinə baxılır. O növ dayanıqlı məsələ tədqiq olunur ki, çoxmənalı əksetdirmənin Xousforf üzrə yüksək yarım fasiləsiz xassəsinin diskret analoqu hesab olunur və məsələnin hər bir parametr yığımına qarşı uyğun Pareto çoxluğu qoyulur. Parametrlər çoxluğunda Qelderin ixtiyari metrikası verildiyi halda, məsələnin dayanıqlıq radiusunun aşağı və yuxarı qiymətləri alınmışdır l_p, $1 \le p \le \infty$.

Açar sözlər: birkriteriallıq, investisiya portfeli, son optimizmin (MAXMAX) meyarı , son pessimizmin meyarı (MINIMAX), Pareto çoxluğu, məsələnin dayanıqlıq radiusu, Qelder metrikası

S.Y. Bukhtoyarov, V.A. Yemelichev

Estimating stability radius of portfolio optimization problem with extreme optimism and extreme pessimism criteria

We consider a bicriteria Boolean investment problem with inconsistent efficiency and risk criteria that finds Pareto set. The type of problem stability under investigation is the discrete analog of Hausdorff upper semicontinuity property of multivalued mappings, which puts each set of parameters into correspondence with the Pareto set. Lower- and upper-bound estimates of stability radius of the problem in the space of parameters with arbitrary Hölder metric l_p, $1 \le p \le \infty$.

Keywords: bicriteriality, investment portfolio, extreme optimism criterion (MAXMAX), extreme pessimism criterion (MINMAX), Pareto set, problem stability radius, Hölder metric

Белорусский государственный университет
Представлено 19.06.14