Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-11.pdf

UOT 519.852.6

N.N. MƏMMƏDOV

TAMƏDƏDLİ ÇANTA MƏSƏLƏSİNDƏ ZƏMANƏTLİ HƏLLİN TAPILMASI

İşdə tamədədli çanta məsələsi üçün zəmanətli həll anlayışı verilmişdir və bu həllin tapılması üsulu işlənmişdir. Bu üsul vasitəsi ilə məhdudiyyət şərtinin sağ tərəfinin minimal artımı hesabına məqsəd funksiyasının lazım olan miqdarda artımına zəmanət verən (təmin edən) həll tapılır.

Açar sözlər: tamədədli çanta məsələsi, optimal həll, zəmanətli həll, zəmanətli suboptimal həll, funksional artım, dixotomiya, hesablama eksperimentləri

1. Giriş: Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b\,, \tag{1.2}$$

$$0 \le x_j \le d_j\,, j = \overline{1,n}\,, \tag{1.3}$$

$$x_j - \text{tamdır}, \qquad j = \overline{1,n}\,. \tag{1.4}$$

Burada, ümumiliyi pozmadan fərz edirik ki, $c_j > 0,\ a_j > 0,\ d_j > 0 \quad (j = \overline{1,n}),\quad b > 0$ verilmiş tam ədədlərdir və

$$\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \cdots \frac{c_k}{a_k} \ge \cdots \ge \frac{c_n}{a_n}$$

münasibətləri ödənilir.

Ədəbiyyatda (1.1)-(1.4) məsələsi “tam ədədli çanta” məsələsi adlandırılır. Bu məsələnin həlli üçün müxtəlif üsullar məlumdur (məsələn, “budaqlanmalar və sərhədlər”, dinamik proqramlaşdırma, kombinator tipli [1-4] və s.). Lakin bu məsələ NP-tam sinifdə olduğundan, məlum üsullardan heç biri böyük ölçülü (yəni, məchulların sayı yüzlərlə olduqda) məsələləri real zaman müddətində həll edə bilmir [5]. Ona görə də belə məsələlərin suboptimal (təqribi) həllərinin tez bir zamanda tapılmasına imkan verən üsullar işlənilmişdir.

Biz bu işdə (1.1)-(1.4) məsələsinin optimal, yaxud suboptimal həllinin tapılması məsələsinə baxmırıq. Qəbul edirik ki, (1.1)-(1.4) məsələsinin $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ optimal həlli müəyyən bir üsul vasitəsilə tapılmışdır. Bu zaman (1.1) funksiyasının maksimal qiyməti

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

olar. Tutaq ki, (1.1) funksiyasının f^* qiymətini müəyyən qədər (məsələn $p\%$) artırmaq istəyirik. Təbiidir ki, bu zaman (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfindəki, b ədədini də müəyyən qədər artırmalıyıq.

Biz bu işdə (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfinin minimal artımı hesabına (1.1) funksiyasının maksimal qiymətinin, əvvəlcədən verilmiş müəyyən ədəddən az olmamasını təmin edən həllin tapılması məsələsinə baxırıq.

Qeyd edək ki, xüsusi halda $d_j = 1, (j = \overline{1,n})$ olduqda bu məsələ [6] işində baxılmışdır.

2. Məsələnin qoyuluşu: (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfinin üzərinə elə $\delta > 0$ tam ədədi əlavə etməli ki, (1.1) funksiyasının qiyməti $f^* + \Delta$ ədədindən kiçik olmasın. Xüsusi halda Δ olaraq f^* ədədinin p faizini qəbul etmək olar. Yəni

$$\Delta = \left[f^* \cdot \frac{p}{100}\right].$$

Burada $[z]$ işarəsi z ədədinin tam hissəsini göstərir.

Beləliklə, aşağıdakı modeli alırıq :

$$\delta \to min \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b + \delta, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge f^* + \Delta, \tag{2.3}$$

$$0 \le x_j \le d_j, j = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

$$x_j - \text{tamdır}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Bu işdə (2.1)-(2.5) məsələsinin zəmanətli həll və zəmanətli suboptimal həll anlayışları verilmiş və onların tapılması üsulları işlənilmişdir.

3. Zəmanətli həllin tapılması üsulunun nəzəri əsaslandırılması: Əvvəlcə [6] işinə uyğun olaraq aşağıdakı anlayışları verək:

<u>Tərif 1:</u> Qeyd olunmuş $\delta > 0$ tam ədədi üçün (2.2)-(2.5)şərtlərini ödəyən hər bir n ölçülü $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektoruna (2.1)-(2.5) məsələsinin mümkün həlli deyəcəyik.

<u>Tərif 2:</u> Qeyd olunmuş $\Delta > 0$ kəmiyyəti üçün (2.1)-(2.5) məsələsində (2.1) parametrinə ən kiçik müsbət tam qiymət verən mümkün həllə (1.1)-(1.4) məsələsinin zəmanətli həlli deyəcəyik.

(2.1)-(2.5)məsələsini bir qədər əlverişli formada yazmaq üçün (2.2) bərabərsizliyinin sol tərəfinə yeni $y \ge 0$ tam dəyişəni əlavə edib, alınan tənlikdən δ məchulunu digər məchullarla ifadə edək.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + y = b + \delta \quad => \delta = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + y - b.$$

Beləliklə, aşağıdakı məsələni alırıq:

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + y - b \to min \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge f^* + \Delta, \tag{3.2}$$

$$0 \le x_j \le d_j, j = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

$$x_j - \text{tamdır}, j = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

Alınan məsələ tamədədli və bir məhdudiyyətli minimallaşdırma məsələsidir. Lakin (1.1)-(1.4) məsələsini maksimallaşdırma məsələsi olduğunu, real praktiki məsələlərin bizdə olan proqram ləvazimatlarının maksimizasiya məsələsini həll etdiyini və eksperimental tədqiqatların

Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.6, 2014
www.icp.az/2014/6-11.pdf

mürəkkəbləşməməsi üçün (3.1)-(3.4)məsələsini ona ekvivalent olan maksimallaşdırma məsələsinə gətirək. Bu məqsədlə (3.2) bərabərsizliyinin hər tərəfini "-1" -ə vurub, orada $x_j = d_j - t_j$, $(j = \overline{1,n})$ əvəzləməsi edək. Burada $0 \le t_j \le d_j, (j = \overline{1,n})$ və tam olmalıdır.

$$\sum_{j=1}^{n}(-c_j x_j^*) \le -f^* - \Delta \qquad =>$$

$$\sum_{j=1}^{n} -c_j(d_j - t_j) \le -f^* - \Delta \qquad =>$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j t_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j d_j - f^* - \Delta \tag{3.5}$$

$x_j = d_j - t_j$, $(j = \overline{1,n})$ əvəzləməsini (3.1) funksiyasında yerinə yazaq:

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} a_j(d_j - t_j) + \mathrm{y} - b \to min,$$

$$\delta = -\sum_{j=1}^{n} a_j t_j + \sum_{j=1}^{n} a_j d_j + \mathrm{y} - b \to min.$$

Bu ifadəni "-1" -ə vurmaqla onu maksimallaşma kriteriyasına çevirək. Onda,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j t_j + b - \mathrm{y} - \sum_{j=1}^{n} a_j d_j \to max. \tag{3.6}$$

Beləliklə, (3.5) və (3.6) münasibətlərini nəzərə almaqla (3.1)-(3.4) məsələsi əvəzinə ona ekvivalent olan aşağıdakı məsələni alırıq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j t_j + b - \mathrm{y} - \sum_{j=1}^{n} a_j d_j \to max \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j t_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j d_j - f^* - \Delta, \tag{3.8}$$

$$0 \le t_j \le d_j, j = \overline{1,n}, \tag{3.9}$$

$$t_j - \text{tamdır}, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{3.10}$$

Qeyd edək ki, $\mathrm{y} \ge 0$ dəyişəni (3.8) məhdudiyyətində iştirak etmədiyindən və (3.7) funksiyasının maksimallaşması tələb olunduğundan optimal halda $\mathrm{y} = 0$ olmalıdır. Beləliklə, biz aşağıdakı teoremi isbat etdik:

Teorem: (2.1)-(2.5) məsələsinin optimal həlli üçün (2.2) bərabərsizliyi bərabərlik kimi ödənilməlidir. Yəni, (3.1)funksiyasında $\mathrm{y} = 0$ olmalıdır.

(3.7)-(3.10) məsələsində

$$b - \sum_{j=1}^{n} a_j d_j \; və \sum_{j=1}^{n} c_j d_j - f^* - \Delta$$

ifadələri sabit ədədlərdir. Bunları, uyğun olaraq, *A* və *B* ilə işarə etsək aşağıdakı maksimallaşma məsələsi alırıq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j t_j + \mathrm{A} \rightarrow max \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j t_j \leq B, \tag{3.12}$$

$$0 \leq t_j \leq d_j \, , j = \overline{1, n} \, , \tag{3.13}$$

$$t_j - \text{tamdır}, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{3.14}$$

Göründüyü kimi (3.11) - (3.14) məsələsi (1.1) - (1.4) məsələsinin analoqudur. Tutaq ki, (3.11) - (3.14) məsələsini məlum üsullardan hər hansı biri ilə (məsələn, "budaqlanmalar və sərhədlər" üsulu ilə) həll edib $T^* = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*)$ həlli tapılmışdır. Onda (2.1)-(2.5) məsələsinin optimal həlli

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (d_1 - t_1^*, d_2 - t_2^*, \dots \, , d_n - t_n^*)$$

olar. Beləliklə, aldığımız $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ həlli (1.1)-(1.4) məsələsinin zəmanətli həlli olar. Bu zaman

$$\delta_{min} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^* - b$$

kimi hesablanmalıdır.

4. Tamədədli çanta məsələsinin zəmanətli suboptimal həlli və onun tapılması:

Əvvəlcə qeyd edək ki, (3.11)-(3.14)məsələsi məlum tamədədli çanta məsələsidir və böyük ölçülü məsələlər üçün onun optimal həllinin tapılması real zaman müddətində mümkün deyil. Ona görə də bu bənddə (1.1) - (1.4) məsələsinin zəmanətli suboptimal həll anlayışı verib və onun tapılması üsulunu işləmişik.

Tutaq ki, (1.1)-(1.4)məsələsinin hər hansı $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_3^s,)$ suboptimal həlli məlumdur. Onda (1.1)funksiyasının bu həllə uyğun qiyməti

$$f^s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s$$

olar və biz müəyyən $\Delta^s = \left[f^s \cdot \frac{p}{100} \right]$ müsbət tamədədini təyin edə bilərik. Burada $[z]$ işarəsi z ədədinin tam hissəsi deməkdir , $p-$ verilmiş sabit ədəddir və Δ^s kəmiyyəti f^s qiymətinin p % artımını göstərir. Onda (2.1)-(2.5) məsələsində f^* və Δ kəmiyyətlərini uyğun olaraq f^s və Δ^s ilə əvəz etməklə, aşağıdakı məsələni alırıq.

$$\delta \rightarrow min \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b + \delta \, , \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq f^s + \Delta^s \, , \tag{4.3}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \, , j = \overline{1, n} \, , \tag{4.4}$$

$$x_j - \text{tamdır}, \qquad j = \overline{1, n} \, . \tag{4.5}$$

Aydındır ki, burada, $\delta > 0$ və tam olmalıdır. Belə ki, $\delta = 0$ olarsa, onda (4.3) bərabərsizliyi ödənilməyəcəkdir, çünki (1.1) funksiyasının suboptimal qiyməti f^s qədərdir.

Qeyd edək ki, (4.1) - (4.5) məsələsi xüsusi növ tamədədli proqramlaşdırma məsələsi olduğundan, NP-tam sinfinə daxildir. Ona görə də biz bu məsələnin suboptimal həllinin qurulması məsələsinə baxırıq.

Tərif 3: Qeyd olunmuş $\Delta^s > 0$ kəmiyyəti üçün (4.1)-(4.5) məsələsində δ kəmiyyətinə mümkün qədər kiçik müsbət tam qiymət verən mümkün həllə (1.1)-(1.4) məsələsinin zəmanətli suboptimal həlli deyecəyik.

İşin bu bəndində yarıya bölmə (dixotomiya) prinsipinə əsaslanaraq zəmanətli suboptimal həllin qurulması qaydası işlənilmişdir.

(1.1) - (1.4) məsələsinin $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s)$ suboptimal həlli aşağıdakı məlum düsturla tapılır. Hər bir $j = 1,2, \dots, n$ üçün

$$x_j^s = \begin{cases} d_j \text{ əgər } \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s + a_j d_j \le b \text{ olarsa} \\ \left[\left(b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s\right) / d_j\right] \text{ əgər } \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s + a_j d_j > b \text{ olarsa} \end{cases} \tag{4.6}$$

Burada $[z]$ işarəsi z ədədinin tam hissəsi deməkdir. Onda (1.1) funksiyasının bu həllə uyğun qiyməti

$$f^s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s$$

olar.

Aydındır ki, $f^s \le f^* \le \bar{f}$ olmalıdır. Burada f^* və $\bar{f}$ kəmiyyətləri (1.1) - (1.4) məsələsində (1.1) funksiyasının uyğun olaraq maksimal qiyməti və maksimal qiymətin yuxarı sərhəddidir.

$\Delta^s = \left[f^s \cdot \frac{p}{100}\right]$ qəbul edək. Burada $p > 0$ verilmiş ədəddir. Bu bənddə δ kəmiyyətinin yarıya bölmə prinsipi ilə minimallaşdırılması qaydası verilmişdir. Bu məqsədlə əvvəlcə δ kəmiyyətinə maksimal

$$\delta' = \delta = \sum_{j=1}^{n} a_j d_j - b$$

qiymətini verib $\bar{b} := b$; $b' := \bar{b} + \delta'$ qəbul edək. Bundan sonra (1.1) - (1.4) mələsində (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfini b' ilə əvəz edib (4.6) düsturu ilə $X^s(\delta') = \left(x_1^s(\delta'), x_2^s(\delta'), \dots, x_n^s(\delta')\right)$ suboptimal həllini qururuq. Onda (1.1) funksiyasının qiyməti

$$f^s(\delta') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s(\delta')$$

olar.

Əgər $f^s(\delta') \ge f^s + \Delta^s$ olarsa, onda, $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right]$; $b' := \bar{b} + \delta'$ qəbul edib (4.6) düsturu ilə cari (1.1) - (1.4) mələsinin $X^s(\delta') = (x_1^s(\delta'), x_2^s(\delta'), \dots, x_n^s(\delta'))$ suboptimal həllini qururuq. Bu hesablama prosesi $f^s(\delta') < f^s + \Delta^s$ münasibəti ödənənə qədər davam etdirilir. Bu halda, $b'' := b'$; $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right]$; $b' := b'' + \delta'$ qəbul edib, (4.6) düsturu ilə cari (1.1) - (1.4) mələsinin $X^s(\delta') = (x_1^s(\delta'), x_2^s(\delta'), \dots, x_n^s(\delta'))$ suboptimal həllini qururuq.

Yuxarıda göstərilən hesablama prosesi $\delta^{'}=0$ olana qədər davam etdirilir. Nəticədə $\delta = b^{'} - \bar{b}$ alarıq. Bu zaman alınmış sonuncu $X^s(\delta^{'}) = \left(x_1^s(\delta^{'}), x_2^s(\delta^{'}), \dots, x_n^s(\delta^{'})\right)$ həlli (1.1) - (1.4) mələsinin zəmanətli suboptimal həlli və bu həllə uyğun (1.1)funksiyasının qiyməti isə

$$f^s(\delta^{'}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s(\delta^{'})$$

olar.

<u>Qeyd:</u> Biz δ kəmiyyətini yarıya bölməklə minimallaşdırma prosesində zəmanətli X^s həllini qururuq. Bu həll vasitəsi ilə δ kəmiyyətinin minimal qiyməti olaraq

$$\delta_{min} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^s(\delta^{'}) - \bar{b}$$

qəbul etməliyik. Aydındır ki, $\delta_{min} \le \delta = b^{'} - \bar{b}$ olmalıdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, [7-10] və s. işlərində parametrik tam ədədli proqramlaşdırma məsələlərinə baxılmışdır . Bu işlərdə ya məqsəd funksiyasının əmsalları, ya məhdudiyyətlərin sağ tərəfləri, ya da məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları parametrdən xətti asılı kəmiyyətlər kimi baxılmışdır. Həmin işlərdə məsələnin verilənlərinin elə dəyişmə intervalları tapılır ki, bu intervallarda optimal həll sabit qalır. Əgər məsələnin verilənləri o intervallardan kənara çıxarsa, onda optimal həll dəyişməlidir. Həmin işlərdə optimal həllin (optimal qiymətin) nə qədər dəyişəcəyi məlum olmur. Aydındır ki, bizim işdə baxdığımız məsələ həmin işlərdən ciddi fərqlənir.

İndi isə təklif etdiyimiz zəmanətli suboptimal həll qurma üsulunun alqoritmini yazaq.

A L Q O R İ T M

Addım1:$n, a_j, c_j, d_j (j = \overline{1,n}), b$ və p ədədlərini daxil etməli.

Addım2:(4.6) düsturu vasitəsilə $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_3^s,)$ suboptimal həlli qurmalı,

$$f^s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s \; v\partial \Delta^s = \left[f^s \cdot \frac{p}{100}\right]$$

ədədlərini hesablamalı.

Addım3:

$$\delta := \sum_{j=1}^{n} a_j d_j - b, \qquad \delta^{'} := \delta, \qquad \bar{b} := b; \quad b^{'} := \bar{b} + \delta^{'}$$

qəbul etməli.

Addım4: (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfini $b^{'}$ ilə əvəz edib, (4.6) düsturu ilə $X^s(\delta^{'}) = (x_1^s(\delta^{'}), x_2^s(\delta^{'}), \dots, x_n^s(\delta^{'}))$ suboptimal həllini tapıb ,

$$f^s(\delta^{'}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s(\delta^{'})$$

hesablamalı.

Addım5: Əgər $f^s(\delta^{'}) < f^s + \Delta^s$ olarsa **Addım6**–ya keçməli , əks halda yəni $f^s(\delta^{'}) \ge f^s + \Delta^s$ olarsa, $\delta^{'} := \left[\frac{\delta^{'}}{2}\right]$; $b^{'} := \bar{b} + \delta^{'}$ qəbul edirik. Əgər $\delta^{'} = 0$ olarsa **Addım7**-ə keç, əks halda **Addım4**-ə keç.

Addım6: $b'' := b'; \delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right]; \ b' := b'' + \delta'$ qəbul etməli. Əgər $\delta' = 0$ olarsa **Addım7**-ə keç, əks halda **Addım4**-ə keç.
Addım7:

$$\delta_{min} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^s(\delta') - \bar{b}$$

hesablamalı və δ_{min}, $f^s(\delta')$, $X^s(\delta')$kəmiyyətlərini çap etməli.
Addım8: STOP.

5. Hesablama eksperimentlərinin nəticələri. Əvvəlcə bu üsulun tətbiqi ilə aşağıdakı məsələni həll edək.

$$8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 3x_5 \to max$$
$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le 19 ,$$
$$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 3,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 0 \le x_4 \le 3,\ 0 \le x_5 \le 4 \text{ və tamdırlar.}$$

Onda,

$X^s = (2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0)$ və $f^s = 46$

Tutaq ki, $f^s = 46$ ədədini ən azı $p = 22\%$ yəni $\Delta^s = 10$ vahid artirmaq lazımdır. Bu zaman δ kəmiyyətinin minimal δ' qiyməti tapılmalıdır. Başqa sözlə, elə $X^s(\delta') = \left(x_1^s(\delta'), x_2^s(\delta'), \dots, x_n^s(\delta')\right)$ həlli tapmalı ki, $19 + \delta' \to min$ olmaqla $f^s \ge 46 + 10 = 56$ olsun. Bunun üçün, bu işdə təklif olunmuş üsula əsasən aşağıdakı əməliyyatları aparaq.

Əvvəlcə

$$\delta' := \delta = \sum_{j=1}^{n} a_j d_j - b = 52 - 19 = 33, \qquad \bar{b} := b = 19, b' = \bar{b} + \delta' = 19 + 33 = 52$$

qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə $X^s = (2,\ 3,\ 5,\ 3,\ 4)$ həllini və uyğun $f^s = 115$ ədədini tapırıq.

$f^s > 56$ olduğundan $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{33}{2}\right] = 16$, $b' := \bar{b} + \delta' = 19 + 16 = 35$ qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə cari $X^s = (2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0)$ həllini və uyğun $f^s = 82$ ədədini alarıq.

$f^s > 56$ olduğundan $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{16}{2}\right] = 8$, $b' := \bar{b} + \delta' = 19 + 8 = 27$ qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə cari $X^s = (2,\ 3,\ 2,\ 0,\ 0)$ həllini və uyğun $f^s = 64$ ədədini alarıq.

$f^s > 56$ olduğundan $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{8}{2}\right] = 4$, $b' := \bar{b} + \delta' = 19 + 4 = 23$ qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə cari $X^s = (2,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0)$ həllini və uyğun $f^s = 55$ ədədini alarıq.

$f^s < 56$ olduğundan $b'' := b' = 23$, $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$, $b' := b'' + \delta' = 25$ qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə cari $X^s = (2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0)$) həllini və uyğun $f^s = 59$ ədədini alarıq.

$f^s > 56$ olduğundan $\delta' := \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$, $b' := b'' + \delta' = 24$ qəbul edib (4.6) düsturu vasitəsilə cari $X^s = (2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0)$) həllini və uyğun $f^s = 59$ ədədini alarıq.

$f^s > 56$ olduğundan $\delta' = \left[\frac{\delta'}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$ alarıq və hesablama prosesi başa çatar.

Beləliklə

$$\delta_{min} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^s(\delta') - \bar{b} = 24 - 19 = 5$$

$X^s = (2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0)$ və $f^s = 59 > 56$ alarıq.

Burada $X^s = (2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 0)\ -$ həlli zəmanətli suboptimal həll olar.

İşdə təklif olunmuş üsulun keyfiyyətini aydınlaşdırmaq məqsədilə müxtəlif ölçülü təsadüfi məsələlər üzərində hesablama eksperimentləri aparılmışdır. Qurulmuş təsadüfi məsələlərin əmsallarının neçə rəqəmli tam ədədlər olması və nəticələr aşağıdakı cədvəllərdə verilmişdir.

Cədvəl 1. $\mathbf{0 < a_j \le 99,\ 0 < c_j \le 99,\ n(100, 200, 500)}$ olduqda $\boldsymbol{\delta_{\min}}$ kəmiyyətlərinin tapılması prosesi

n	100				200				500			
b	2591				5234				13233			
f^s	5520				10621				28750			
$p\%$	1	2	3	5	1	2	3	5	1	2	3	5
$\Delta = \left[f^s \frac{p}{100}\right]$	55	110	165	276	106	212	318	531	287	575	862	1437
δ^*_{min}	43	92	163	280	116	241	180	514	267	522	775	1323
δ_{min}	45	93	187	280	118	236	209	561	254	511	964	1413
$f^s(\delta^*_{min})$	5589	5643	5702	5811	10738	5953	10943	11162	29063	29337	29624	30221
$f^s(\delta_{min})$	5580	5643	5734	5795	10741	5969	10964	11179	29047	29329	29642	30196

Cədvəl 2. $\mathbf{0 < a_j \le 99,\ 0 < c_j \le 99,\ n(1000, 2000, 5000)}$ olduqda $\boldsymbol{\delta_{\min}}$ kəmiyyətlərinin tapılması prosesi

n	1000				2000				5000			
b	26382				54905				73400			
f^s	59060				114798				156355			
$p\%$	1	2	3	5	1	2	3	5	1	2	3	5
$\Delta = \left[f^s \frac{p}{100}\right]$	590	1181	1771	2953	1147	2295	3443	5739	1563	3127	4690	7817
δ^*_{min}	979	1090	1983	2755	1108	2231	3377	5692	1505	3023	4560	7691
δ_{min}	1203	1098	1923	2884	1107	2249	4002	6005	1505	3345	5352	8028
$f^s(\delta^*_{min})$	59740	60254	60851	34074	115944	117093	118243	120548	157919	159482	161045	164173
$f^s(\delta_{min})$	59658	60249	60882	34146	115959	117119	118869	120846	157919	159812	161845	164504

Cədvəl 3. $\mathbf{0 < a_j \le 999,\ 0 < c_j \le 999,\ n(100, 200, 500)}$ olduqda $\boldsymbol{\delta_{\min}}$ kəmiyyətlərinin tapılması prosesi

n	100				200				500			
b	26173				29030				73351			
f^s	55413				58578				158621			
$p(\%)$	1	2	3	5	1	2	3	5	1	2	3	5

$\Delta = \left[f^s \frac{p}{100}\right]$	554	1108	1662	2770	1586	1586	1757	2928	1586	3172	4758	7931
δ^*_{min}	484	984	1430	1428	549	1070	1718	2881	1430	2841	4315	7241
δ_{min}	356	891	1908	2097	661	1190	2116	3174	1378	2841	5348	8022
$f^s(\delta^*_{min})$	55986	56561	57124	31977	59191	59763	60420	61575	160259	161836	163380	166651
$f^s(\delta_{min})$	55986	56531	57086	32515	59324	59780	60736	61872	160216	161836	164592	167438

Cədvəl 4. $0 < a_j \le 999,\ 0 < c_j \le 999,\ n(1000, 2000, 5000)$ olduqda δ_{min} kəmiyyətlərinin tapılması prosesi

n	1000				2000				5000		
b	146301				304417				740774		
f^s	325760				633548				1570299		
$p(\%)$	1	2	3	5	1	2	3	5	1	2	5
$\Delta = \left[f^s \frac{p}{100}\right]$	3257	6515	9772	16288	6335	12670	19006	31677	1563	3127	4690
δ^*_{min}	2978	5961	9046	15135	6121	12285	18591	31317	15102	30316	45680
δ_{min}	2999	5999	10667	16002	6242	12485	22197	33295	15190	30382	54014
$f^s(\delta^*_{min})$	329019	332299	335546	342056	639884	646218	652580	665225	1586017	1601719	1617409
$f^s(\delta_{min})$	329065	332313	337302	342916	640030	646421	656167	667151	1586079	1601778	1625800

Cədvəllərdə aşağıdakı işarələmələr qəbul olunub:
n - məchulların sayı,
b- (1.2) məsələsinin sağ tərəfi,
f^s- (1.1)-(1.3) məsələsində suboptimal həllin (1.1) funksiyasina verdiyi qiymətdir,
$p(\%)$ - ilə f^s kəmiyyətinin artım faizi işarə olunub,
Δ - ilə f^s kəmiyyətinin artım miqdarı işarə olunub,
δ^*_{min}- (2.1)-(2.4) məsələsində δ kəmiyyətinin işin III bəndində verilmiş üsul ilə tapılmış miqdarıdır,
δ_{min} - (2.1)-(2.4) məsələsinin işin IV bəndindəki üsul ilə tapılmış δ kəmiyyətinin minimal miqdarıdır,
$f^s(\delta^*_{min})$- (1.1)-(1.3) məsələsində b sağ tərəfinin işin III bəndinə əsasən δ^*_{min} artımından sonra (1.1) funksiyasının zəmanətli suboptimal həllə gorə qiymətidir.
$f^s(\delta_{min})$ - kəmiyyəti işin IV bəndindəki üsul ilə tapılmış δ_{min} kəmiyyətinə görə qurulan suboptimal həllin (1.1) funksiyasına verdiyi qiymətdir.

6. Nəticə. Cədvəllərdən görünür ki, işdə təklif olunmuş üsullar vasitəsilə (1.2) bərabərsizliyinin sağ tərəfinin kifayət qədər az artımı hesabına (1.1) funksiyasının qeyd olunmuş artımı təmin olunur . Lakin III və ya IV bəndlərindəki üsulların hansının həmişə keyfiyyətli olmasını demək olmur. Ona görə də real praktiki məsələni hər iki üsulla həll edib, daha yaxşısını seçmək lazımdır.

Ədəbiyyat

1. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование М. Наука 1969, 368 с.
2. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). М.УРСА, 2003 , 191ст.
3. Martello S., Toth P. Knapsack problems. Algorithm and Computers Implementations. J.Willey & Sons: New York Chichester, 1990, pp.296.
4. Kellerer H. , Pferschy U., Pisinger D. Knapsack problems. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2004, pp.546.
5. Гэри М., Джонсон Д. - Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. МИР, 1982 .
6. K.Ş. Məmmədov, .N. Məmmədov. Çanta məsələsində təminatlı suboptimal həll anlayışı və onun tapılması üçün bir üsul.AMEA xəbərləri 2012 №3,104-110.
7. Marsten R.E., Morin T.L. Parametric Integer Programming the Right –Hand – Side Case. Annals of Discrete Mathematics, 1977, 1, pp. 375-390.
8. Bank B., Mandel R. Parametric Integer Optimization. Akademie – Verlag , 1988.
9. Burkard R. E. Pferschy U. The inverse-parametric knapsack problem. European Journal of Operational Research, 1995, 83 : pp.376-393.
10. Greenberg H.J. An annotaded bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization. Advances in Computional and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search, pages 97-148, Kluver, 1998.
11. Бабаев Дж. А., Мамедов К. Ш., Мехтиев М. Г. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце. ЖВМ и МФ , 1978 , №6,ст. 1443-1453.

УДК 519.852.6

Н.Н. Мамедов

Алгоритм для нахождения гарантированного субоптимального решения задачи о ранце

Разработаны методы построения гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения в целочисленной задаче о ранце. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: целочисленные задаче о ранце, субоптимальное решение, гарантированное решение, гарантированное субоптимальное решение, дихотомия, вычислительные эксперименты

N.N. Mammadov

Finding guaranteed solution in integer knapsack problem

An algorithm for finding the guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution of the integer knapsack problem is given. A program on this algorithm was composed, comprehensive and comparative computational experiments were done.

Keywords: integer knapsack problem, suboptimal solution, guaranteed solution, guaranteed suboptimal solution, dichotomy, calculating experiments

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu Təqdim olunub 09.04.14