

УДК 681.5

В.Д. ДМИТРИЕНКО, А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ

АВТОМАТИЗАЦИЯ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ

Разработаны программные средства для автоматизации преобразований нелинейных моделей объектов к эквивалентным линейным моделям. С их помощью выполнен синтез линейной математической модели движения дизель-поезда в форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу четырех тяговых асинхронных двигателей. Полученная модель может использоваться для поиска оптимальных управлений, а также для исследования процессов буксования и юза, а также параллельной работы двигателей.

Ключевые слова: форма Бруновского, линейная математическая модель движения дизель-поезда, исследования процессов буксования и юза, параллельная работа двигателей

1. Введение. Трудности анализа и синтеза нелинейных систем управления общеизвестны. Поэтому в течении десятилетий ведется поиск более мощных теоретических средств, чем существующие, для решения фундаментальных проблем теории управления. Одним из таких средств является современная геометрия, в частности, геометрический подход к теории управления на основе теории групп и дифференциальной геометрии. Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [1, 2]. Существенное преимущество нового научного направления состоит не только в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [1, 2], но и в реальной осуществимости эквивалентных преобразований нелинейных систем к линейным. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [1, 3]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования линейной обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления [1-8]. Однако в этом случае необходимо выполнять трудоемкие аналитические преобразования, которые не автоматизированы ни в одном из известных пакетов моделирования и которые стали причиной разрыва между теоретическими результатами геометрической теории управления и решением практических задач синтеза систем управления [9, 10].

2. Постановка задачи. Разработка программных средств для универсального пакета моделирования, позволяющих автоматизировать сложные аналитические преобразования, необходимые в геометрической теории управления при получении из нелинейных математических моделей объектов эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. Демонстрация работоспособности программного обеспечения при синтезе линейной математической модели в форме Бруновского, описывающей процесс движения дизель-поезда.

3. Методы решения. В процессе разработки программного обеспечения согласно описанного в работе [10, с. 66-67] алгоритма синтезированы функции, которые выполняют следующие действия: формируют векторные поля объектов по их моделям, проверяют условия инволютивности, вычисляют производные Ли, вычисляют преобразования

переменных расширенной модели объекта в переменные в форме Бруновского, а также выполняют интегрирование системы дифференциальных уравнений.

Продемонстрируем эти функции в процессе синтеза линейной математической модели дизель-поезда с четырьмя тяговыми асинхронными двигателями.

Движение дизель-поезда в режиме тяги и в режиме перехода от тяги к буксованию может быть описано следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 V; \quad (3.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{q=1}^4 (k_2^q \mu^q (\Psi_{ur}^q i_{vs}^q - \Psi_{vr}^q i_{us}^q)) - k_3 - k_4 V - k_5 V^2; \quad (3.2)$$

$$\frac{di_{us}^q}{dt} = \alpha^q \beta^q \Psi_{ur}^q - \gamma^q i_{us}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{vr}^q + \frac{1}{\sigma^q L_s^q} u_{us}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \quad (3.3)$$

$$\frac{di_{vs}^q}{dt} = \alpha^q \beta^q \Psi_{vr}^q - \gamma^q i_{vs}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{ur}^q + \frac{1}{\sigma^q L_s^q} u_{vs}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \quad (3.4)$$

$$\frac{d\Psi_{ur}^q}{dt} = -\alpha^q \Psi_{ur}^q - \frac{k_6 p}{r^q} V \Psi_{vr}^q + \alpha^q L_m^q i_{us}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \quad (3.5)$$

$$\frac{d\Psi_{vr}^q}{dt} = -\alpha^q \Psi_{vr}^q - \frac{k_6 p}{r^q} V \Psi_{ur}^q + \alpha^q L_m^q i_{vs}^q, \quad q = \overline{1, 4}, \quad (3.6)$$

где S – расстояние, пройденное от начала перегона; t – время; $k_1, k_2^1, k_2^2, k_2^3, k_2^4, k_3, \dots, k_6$ –

постоянные коэффициенты; V – скорость движения состава; $\mu^q = \frac{p L_m^q}{J^q L_r^q}$; q – число

двигателей; p – число пар полюсов статора у каждого двигателя; L_m^q ($q = \overline{1, 4}$) –

индуктивность контура намагничивания (взаимная индуктивность); J^q ($q = \overline{1, 4}$) –

приведенный момент инерции двигателя; L_r^q, L_s^q ($q = \overline{1, 4}$) – полные индуктивности,

соответственно ротора и статора; Ψ_{ur}^q, Ψ_{vr}^q ($q = \overline{1, 4}$) – потокосцепления по осям u и v

роторов тяговых двигателей; i_{vs}^q, i_{us}^q ($q = \overline{1, 4}$) – статорные токи двигателей по осям u и v ;

$\alpha^q = \frac{1}{T_r^q}$; T_r^q ($q = \overline{1, 4}$) – постоянная времени ротора q -го двигателя; $\beta^q = \frac{L_m^q}{\sigma^q L_s^q L_r^q}$;

$\sigma^q = 1 - \frac{(L_m^q)^2}{L_s^q L_r^q}$ ($q = \overline{1, 4}$) – полный коэффициент рассеяния q -го двигателя;

$\gamma^q = \frac{R_r^q (L_m^q)^2}{\sigma^q L_s^q (L_r^q)^2} + \frac{R_s^q}{\sigma^q L_s^q}$; R_r^q, R_s^q ($q = \overline{1, 4}$) – активные сопротивления роторных и статорных

обмоток двигателей; r^q ($q = \overline{1, 4}$) – радиус колеса q -го двигателя; u_{us}^q, u_{vs}^q ($q = \overline{1, 4}$) –

статорные напряжения q -го двигателя по осям u и v ; $\frac{k_6 V}{r^q} = \varpi^q$ ($q = \overline{1, 4}$); ϖ^q – частота

вращения ротора q -го двигателя.

Преобразование исходной модели к линейному виду начнем с введения в правые части уравнений (3.3) и (3.4) новых управлений U_i ($i = \overline{1, 8}$), позволяющих убрать из соответствующих уравнений нелинейные части:

$$U_{2q-1} = \alpha^q \beta^q \Psi_{ur}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{vr}^q + \frac{u_{us}^q}{\sigma^q L_s^q}, \quad q = \overline{1, 4}; \quad U_{2q} = \alpha^q \beta^q \Psi_{vr}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{ur}^q + \frac{u_{vs}^q}{\sigma^q L_s^q}, \quad q = \overline{1, 4}.$$

Обозначив $x_1 = S$; $x_2 = V$; $x_3 = \Psi_{ur}^1$; $x_4 = i_{us}^1$; $x_5 = \Psi_{vr}^1$; $x_6 = i_{vs}^1$; $x_7 = \Psi_{ur}^2$; $x_8 = i_{us}^2$; $x_9 = \Psi_{vr}^2$; $x_{10} = i_{vs}^2$; $x_{11} = \Psi_{ur}^3$; $x_{12} = i_{us}^3$; $x_{13} = \Psi_{vr}^3$; $x_{14} = i_{vs}^3$; $x_{15} = \Psi_{ur}^4$; $x_{16} = i_{us}^4$; $x_{17} = \Psi_{vr}^4$; $x_{18} = i_{vs}^4$; $a_{11} = k_1$; $a_{21} = a_{22} = k_2^1 \mu^1$; $a_{23} = a_{24} = k_2^2 \mu^2$; $a_{25} = a_{26} = k_2^3 \mu^3$; $a_{27} = a_{28} = k_2^4 \mu^4$; $a_{29} = k_3$; $a_{210} = k_4$; $a_{211} = k_5$; $a_{31} = a_{51} = -\alpha^1$; $a_{32} = a_{52} - \frac{k_6 p}{r^1}$; $a_{33} = a_{53} = \alpha^1 L_m^1$; $a_{41} = a_{61} = -\gamma^1$; $a_{71} = a_{91} = -\alpha^2$; $a_{72} = a_{92} = -\frac{k_6 p}{r^2}$; $a_{73} = a_{93} = \alpha^2 L_m^2$; $a_{81} = a_{101} = -\gamma^2$; $a_{111} = a_{131} = -\alpha^3$; $a_{112} = a_{132} = -\frac{k_6 p}{r^3}$; $a_{113} = a_{133} = \alpha^3 L_m^3$; $a_{121} = a_{141} = -\gamma^3$; $a_{151} = a_{171} = -\alpha^4$; $a_{152} = a_{172} = -\frac{k_6 p}{r^4}$; $a_{153} = a_{173} = \alpha^4 L_m^4$; $a_{161} = a_{181} = -\gamma^4$, из системы уравнений (3.1)-(3.6) получим следующую модель, описывающую движение дизель-поезда по железнодорожному перегону:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_2 = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sum_{i=0}^3 a_{2(1+2i)} x_{3+4i} x_{6+4i} - \sum_{i=0}^3 a_{2(2+2i)} x_{4+4i} x_{5+4i} - a_{29} - a_{210} x_2 - a_{211} x_2^2 = f_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31} x_3 + a_{32} x_2 x_5 + a_{33} x_4 = f_3; \quad \frac{dx_{2+2j}}{dt} = a_{(2+2j)1} x_{2+2j} + U_j = f_{2+2j} + U_j, \quad j = \overline{1, 8}; \\ \frac{dx_5}{dt} &= a_{51} x_5 + a_{52} x_2 x_3 + a_{53} x_6 = f_5; \quad \frac{dx_7}{dt} = a_{71} x_7 + a_{72} x_2 x_9 + a_{73} x_8 = f_7; \\ \frac{dx_9}{dt} &= a_{91} x_9 + a_{92} x_2 x_7 + a_{93} x_{10} = f_9; \quad \frac{dx_{11}}{dt} = a_{111} x_{11} + a_{112} x_2 x_{13} + a_{113} x_{12} = f_{11}; \\ \frac{dx_{13}}{dt} &= a_{131} x_{13} + a_{132} x_2 x_{11} + a_{133} x_{14} = f_{13}; \quad \frac{dx_{15}}{dt} = a_{151} x_{15} + a_{152} x_2 x_{17} + a_{153} x_{16} = f_{15}; \\ \frac{dx_{17}}{dt} &= a_{171} x_{17} + a_{172} x_2 x_{15} + a_{173} x_{18} = f_{17}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С системой дифференциальных уравнений (3.7) связаны следующие векторные поля:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = |f_1, f_2, \dots, f_{18}|^T,$$

$$\mathbf{Y}_1 = |0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T, \quad \mathbf{Y}_2 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T,$$

$$\mathbf{Y}_3 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T, \quad \mathbf{Y}_4 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T,$$

$$\mathbf{Y}_5 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0|^T, \quad \mathbf{Y}_6 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0|^T,$$

$$\mathbf{Y}_7 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T, \quad \mathbf{Y}_8 = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1|^T,$$

которые в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

$$f_1 = \text{sym}('a11 * x2');$$

$$f_2 = \text{sym}('a21 * x3 * x6 - a22 * x5 * x4 + a23 * x7 * x10 - a24 * x9 * x8 + a25 * x11 * x14 - a26 * x13 * x12 + a27 * x15 * x18 - a28 * x17 * x16 - a29 - a210 * x2 - a211 * x2^2');$$

$$f_3 = \text{sym}('a31 * x3 + a32 * x2 * x5 + a33 * x4');$$

$$f_4 = \text{sym}('a41 * x4');$$

$$f_5 = \text{sym}('a51 * x5 + a52 * x2 * x3 + a53 * x6');$$

```

f6 = sym('a61 * x6');
f7 = sym('a71 * x7 + a72 * x2 * x9 + a73 * x8');
f8 = sym('a81 * x8');
f9 = sym('a91 * x9 + a92 * x2 * x7 + a93 * x10');
f10 = sym('a101 * x10');
f11 = sym('a111 * x11 + a112 * x2 * x13 + a113 * x12');
f12 = sym('a121 * x12');
f13 = sym('a131 * x13 + a132 * x2 * x11 + a133 * x14');
f14 = sym('a141 * x14');
f15 = sym('a151 * x15 + a152 * x2 * x17 + a153 * x16');
f16 = sym('a161 * x16');
f17 = sym('a171 * x17 + a172 * x2 * x15 + a173 * x18');
f18 = sym('a181 * x18');
X = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10; f11; f12; f13; f14; f15; f16; f17; f18];
Y1 = [0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y2 = [0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y3 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y4 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y5 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y6 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0];
Y7 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0];
Y8 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
x = [sym('x1') 'x2' 'x3' 'x4' 'x5' 'x6' 'x7' 'x8' 'x9' 'x10' 'x11' 'x12' 'x13' 'x14' 'x15' 'x16' 'x17'
'x18'];
    
```

Система уравнений (3.7) может быть преобразована к форме Бруновского только в случае, если инволютивны распределения $M^0 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8\}$, $M^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8, L_X Y_1, L_X Y_2, \dots, L_X Y_8\}$ и M^2 для этой системы [2], где $\text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8\}$ – линейная оболочка векторов Y_1, Y_2, \dots, Y_8 , $L_X Y_k$ ($k = \overline{1, 8}$) – производные Ли вдоль векторного поля X векторных полей Y_k ($k = \overline{1, 8}$).

Для проверки возможности преобразования широкого класса нелинейных систем управления к канонической форме Бруновского была разработана функция *involutivity*(M, x), проверяющая выполнение условий инволютивности последовательности распределений, которая возвращает значение "1", если для распределения M условия инволютивности выполняются и значение "0" – если нет. Функция проверки условий инволютивности представляет собой следующую последовательность команд:

```

function involutive = involutivity(S, x)
saved_rank = rank(S);
lenght = size(S, 2);
for i = 1 : (lenght - 1)
for j = (i + 1) : lenght
S = [S diff(S(:,i), S(:,j), x)]; end end
involutive = saved_rank == rank(S);
end
    
```

Проверка инволютивности распределения M^0 в пакете моделирования Matlab с использованием описанной выше функции осуществляется следующим образом:

```

M0 = [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8];
    
```

```
involutive = involutivity(M0, x);
>> involutive = 1
```

Поскольку векторные поля Y_i ($i = \overline{1,8}$) постоянны, то распределение M^0 – инволютивно и размерность распределения $\dim M^0 = 8$.

Проанализируем распределение M^1 , для этого сначала осуществим вычисление производных Ли векторных полей Y_k ($k = \overline{1,8}$) вдоль векторного поля X с помощью разработанной функции $Dif_Li(X, Y, x, N)$, которая возвращает N -ю производную Ли вдоль векторного поля X векторного поля Y , по элементам вектора x . Функция вычисления производной Ли представляет собой следующую последовательность команд:

```
function U = Dif_Li(X, Y, variables, N)
U(:, 1) = sym(Y);
for i = 2 : N+2
U(:, i) = diffli(X, U(:, i - 1 ), variables); end
end
```

Проверка инволютивности распределения M^1 в пакете моделирования Matlab с использованием функций Dif_Li и $involutivity$ осуществляется следующим образом:

```
C1_1 = Dif_Li(X, Y1, x, 2); M1_1 = C1_1(:, 1 : (size(C1_1, 2) - 1));
C1_2 = Dif_Li(X, Y2, x, 2); M1_2 = C1_2(:, 1 : (size(C1_2, 2) - 1));
C1_3 = Dif_Li(X, Y3, x, 2); M1_3 = C1_3(:, 1 : (size(C1_3, 2) - 1));
C1_4 = Dif_Li(X, Y4, x, 2); M1_4 = C1_4(:, 1 : (size(C1_4, 2) - 1));
C1_5 = Dif_Li(X, Y5, x, 2); M1_5 = C1_5(:, 1 : (size(C1_5, 2) - 1));
C1_6 = Dif_Li(X, Y6, x, 2); M1_6 = C1_6(:, 1 : (size(C1_6, 2) - 1));
C1_7 = Dif_Li(X, Y7, x, 2); M1_7 = C1_7(:, 1 : (size(C1_7, 2) - 1));
C1_8 = Dif_Li(X, Y8, x, 2); M1_8 = C1_8(:, 1 : (size(C1_8, 2) - 1));
M1=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1), M1_6(:,1), M1_7(:,1),
M1_8(:,1), M1_1(:,2), M1_2(:,2), M1_3(:,2), M1_4(:,2), M1_5(:,2), M1_6(:,2), M1_7(:,2),
M1_8(:,2)];
involutive = involutivity(M1, x);
>> involutive = 0
```

Проверка условий инволютивности показывает, что распределение M^1 не является инволютивным, однако проверка всех его подраспределений $M_k^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8, L_X Y_k\}$, $k = \overline{1,8}$, показывает, что они являются инволютивными:

```
M11=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1), M1_6(:,1), M1_7(:,1),
M1_8(:,1), M1_1(:,2)];
involutive = involutivity(M11, x);
>>involutive = 1
M12=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1), M1_6(:,1), M1_7(:,1),
M1_8(:,1), M1_2(:,2)];
involutive = involutivity(M12, x);
>>involutive = 1
.....
.....
M18=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1), M1_6(:,1), M1_7(:,1),
M1_8(:,1), M1_8(:,2)];
involutive = involutivity(M18, x);
>>involutive = 1
```

Поэтому дополнительные переменные или интеграторы можно вводить в любой канал управления. Однако введение 1, 2, ..., 6 или 7 интеграторов в любые каналы не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения M^1 для расширенной системы. Распределение M^1 становится инволютивным только при введении одного интегратора в каждый канал объекта управления.

Для расширенной модели объекта управления введем следующие обозначения:

$$y_i = x_i, \quad i = \overline{1, 4}; \quad y_{2+3j} = U_j, \quad \frac{dy_{2+3j}}{dt} = U_j^*, \quad j = \overline{1, 8}; \quad y_6 = x_5; \quad y_7 = x_6; \quad y_9 = x_7; \quad y_{10} = x_8; \quad y_{12} = x_9;$$

$$y_{13} = x_{10}; \quad y_{15} = x_{11}; \quad y_{16} = x_{12}; \quad y_{18} = x_{13}; \quad y_{19} = x_{14}; \quad y_{21} = x_{15}; \quad y_{22} = x_{16}; \quad y_{24} = x_{17}; \quad y_{25} = x_{18}.$$

В этих обозначениях расширенная модель объекта записывается таким образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_2 = \Phi_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}y_3y_7 - a_{22}y_4y_6 + a_{23}y_9y_{13} - a_{24}y_{10}y_{12} + a_{25}y_{15}y_{19} - a_{26}y_{16}y_{18} + a_{27}y_{21}y_{25} - a_{28}y_{22}y_{24} -$$
$$- a_{29} - a_{210}y_2 - a_{211}y_2^2 = \Phi_2;$$

$$\frac{dy_3}{dt} = a_{31}y_3 + a_{32}y_2y_6 + a_{33}y_4 = \Phi_3; \quad \frac{dy_{1+3j}}{dt} = a_{(2+2j)1}y_{1+3j} + y_{2+3j} = \varphi_{1+3j}, \quad j = \overline{1, 8};$$

$$\frac{dy_{2+3j}}{dt} = U_j^*, \quad \varphi_{2+3j} = 0, \quad j = \overline{1, 8}; \quad \frac{dy_6}{dt} = a_{51}y_6 + a_{52}y_2y_3 + a_{53}y_7 = \Phi_6;$$

$$\frac{dy_9}{dt} = a_{71}y_9 + a_{72}y_2y_{12} + a_{73}y_{10} = \Phi_9; \quad \frac{dy_{12}}{dt} = a_{91}y_{12} + a_{92}y_2y_9 + a_{93}y_{13} = \Phi_{12};$$

$$\frac{dy_{15}}{dt} = a_{111}y_{15} + a_{112}y_2y_{18} + a_{113}y_{16} = \Phi_{15}; \quad \frac{dy_{18}}{dt} = a_{131}y_{18} + a_{132}y_2y_{15} + a_{133}y_{19} = \Phi_{18};$$

$$\frac{dy_{21}}{dt} = a_{151}y_{21} + a_{152}y_2y_{24} + a_{153}y_{22} = \Phi_{21}; \quad \frac{dy_{24}}{dt} = a_{171}y_{24} + a_{172}y_2y_{21} + a_{173}y_{25} = \Phi_{24}.$$

С этой моделью объекта управления связаны векторные поля:

$$Y(y) = |\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{25}, \varphi_{26}|^T;$$

$$Y_1^* = |0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_2^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_3^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_4^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_5^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_6^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0|^T;$$

$$Y_7^* = |0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T;$$

$$Y_8^* = |0, 1, 0, 0, 0, 0, 0|^T,$$

которые в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

$$f1 = \text{sym}('a11 * y2');$$

$$f2 = \text{sym}('a21 * y3 * y7 - a22 * y6 * y4 + a23 * y9 * y13 - a24 * y12 * y10 + a25 * y15 * y19 - a26 * y18 * y16 + a27 * y21 * y25 - a28 * y24 * y22 - a29 - a210 * y2 - a211 * y2^2');$$

```

.....
f25 = sym('a181 * y25 + y26');
f26 = sym('0');
Y_new = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10; f11; f12; f13; f14; f15; f16; f17; f18; f19; f20;
f21; f22; f23; f24; f25; f26];
Y1_new = [0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
.....
Y8_new = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
y_new = [sym('y1') 'y2' 'y3' 'y4' 'y5' 'y6' 'y7' 'y8' 'y9' 'y10' 'y11' 'y12' 'y13' 'y14' 'y15' 'y16' 'y17'
'y18' 'y19' 'y20' 'y21' 'y22' 'y23' 'y24' 'y25' 'y26'];
    
```

Поскольку вектора Y_k^* ($k = \overline{1,8}$) постоянны, то распределение $M^{0*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_8^*\}$

– инволютивно, что подтверждает и программное обеспечение.

```

M0_new=[Y1_new, Y2_new, Y3_new, Y4_new, Y5_new, Y6_new, Y7_new, Y8_new];
involutive = involutivity(M0_new, y_new);
>> involutive = 1
    
```

Так как производные Ли вдоль векторного поля Y векторных полей Y_k^* ($k = \overline{1,8}$) являются постоянными векторами, то распределение M^{1*} для расширенной системы является инволютивным.

Проверка инволютивности распределения $M^{2*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_8^*, L_Y Y_1^*, L_Y Y_2^*, \dots, L_Y Y_8^*, L_Y^2 Y_1^*, L_Y^2 Y_2^*, \dots, L_Y^2 Y_8^*\}$, где $L_Y^2 Y_k^*$ ($k = \overline{1,8}$) – производные Ли второго порядка, показывает, что оно не является инволютивным:

```

M2_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1), M1_4_new(:,1),
M1_5_new(:,1), M1_6_new(:,1), M1_7_new(:,1), M1_8_new(:,1), M1_1_new(:,2),
M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2), M1_4_new(:,2), M1_5_new(:,2), M1_6_new(:,2),
M1_7_new(:,2), M1_8_new(:,2), M1_1_new(:,3), M1_2_new(:,3), M1_3_new(:,3),
M1_4_new(:,3), M1_5_new(:,3), M1_6_new(:,3), M1_7_new(:,3), M1_8_new(:,3)];
involutive = involutivity(M2_new, y_new);
>> involutive = 0
    
```

Однако инволютивными являются всех подраспределения $M_k^{2*} = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8, L_Y Y_1^*, L_Y Y_2^*, \dots, L_Y Y_8^*, L_Y^2 Y_k^*\}$, $k = \overline{1,8}$, распределения M^{2*} :

```

M21_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1), M1_4_new(:,1),
M1_5_new(:,1), M1_6_new(:,1), M1_7_new(:,1), M1_8_new(:,1), M1_1_new(:,2),
M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2), M1_4_new(:,2), M1_5_new(:,2), M1_6_new(:,2),
M1_7_new(:,2), M1_8_new(:,2), M1_1_new(:,3)];
involutive = involutivity(M21_new, y_new);
>> involutive = 1
    
```

```

.....
M28_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1), M1_4_new(:,1),
M1_5_new(:,1), M1_6_new(:,1), M1_7_new(:,1), M1_8_new(:,1), M1_1_new(:,2),
M1_2_new(:,2), M1_3_new(:,2), M1_4_new(:,2), M1_5_new(:,2), M1_6_new(:,2),
M1_7_new(:,2), M1_8_new(:,2), M1_8_new(:,3)];
involutive = involutivity(M28_new, y_new);
>> involutive = 1
    
```

Этого оказывается достаточно для осуществления динамической линеаризации и получения системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского. На

основании теоремы о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с m управлениями [2], получим, что каноническая форма Бруновского имеет 8-м клеток, а индекс управляемости k_{\max} для данного объекта равен 8. Математическая модель объекта управления в форме Бруновского в пространстве "вход – состояние" имеет следующий вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1}, \quad i = \overline{1, 26}, \quad i \neq 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; \quad \frac{dz_{(2+3q)}}{dt} = v_q, \quad q = \overline{1, 8}, \quad (3.8)$$

где v_j ($j = \overline{1, 8}$) – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет 8-м клеток, то необходимо определить 8-м функций $T_j(\mathbf{y})$ ($j = \overline{1, 8}$), преобразующих переменные расширенной модели объекта управления в переменные модели в форме Бруновского:

$$z_l = T_l(\mathbf{y}); \quad z_{3+k} = T_l(\mathbf{y}), \quad l = (3+k)/3, \quad k = 3, 6, 9, \dots, 21.$$

Методика определения этих функций известна [2, 10, 11]. В данном случае они являются однокомпонентными составляющими вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{26})$. Из этих функций путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} + U_1 \mathbf{Y}_1^* + U_2 \mathbf{Y}_2^* + \dots + U_8 \mathbf{Y}_8^*$ можно получить выражения для определения соответственно z_2, z_3, z_4, z_5 (из функции $T_1(\mathbf{y})$), z_7, z_8 (из функции $T_2(\mathbf{y})$), z_{10}, z_{11} (из функции $T_3(\mathbf{y})$), z_{13}, z_{14} (из функции $T_4(\mathbf{y})$), z_{16}, z_{17} (из функции $T_5(\mathbf{y})$), z_{19}, z_{20} (из функции $T_6(\mathbf{y})$), z_{22}, z_{23} (из функции $T_7(\mathbf{y})$), z_{25}, z_{26} (из функции $T_8(\mathbf{y})$). В качестве примера рассмотрим получение зависимостей для определения z_2, z_3, z_4, z_5 с помощью функции $T_1(\mathbf{y})$.

Для вычисления функций перехода от переменных расширенной нелинейной модели объекта управления к переменным модели в форме Бруновского применялась специально разработанная для этого функция *brunovsky*(X, Y, T, x, N), которая дифференцируя функцию T вдоль векторных полей X и Y , по элементам вектора x , возвращает для каждой клетки формы Бруновского массив из N выражений связывающих переменные в линейной и нелинейной моделях, а также новое управление для соответствующей клетки линейной модели в форме Бруновского. Функция *brunovsky* представляет собой следующую последовательность команд:

```
function [Z, V] = brunovsky(X, Y, T, x, N)
Z(1, 1) = T;
for i = 2 : N
Z(i, 1) = diffvec(Z(i-1, 1), x, 1) * X; end
V = diffvec (Z(N, 1), x, 1) * X;
end
```

Для исследуемого объекта управления имеем: $T_1(\mathbf{y}) = y_1$, поэтому $z_1 = y_1$.

```
T1 = [sym('y1')];
[Z1_2_3_4_5, V1] = brunovsky(Y_new, [Y1_new], T1, y_new, 5);
Z1_2_3_4_5 = simple(Z1_2_3_4_5)
```

Дифференцируя функцию $T_1(\mathbf{y})$ вдоль векторного поля \mathbf{Y}^* и учитывая, что z_2, z_3, z_4 и их производные не зависят от управлений, получим функции перехода к канонической форме Бруновского:

$$z_2 = \frac{dz_1}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_1(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_1(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_1(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_i = a_{11} y_2;$$

$$z_3 = \frac{dz_2}{dt} = L_{Y^*}(L_Y T_1(y)) = L_Y(a_{11}y_2) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial(L_Y T_1(y))}{\partial y_i} \varphi_i = a_{11} \varphi_2 = a_{11}(a_{21}y_3y_7 - a_{22}y_6y_4 +$$

$$+ a_{23}y_9y_{13} - a_{24}y_{12}y_{10} + a_{25}y_{15}y_{19} - a_{26}y_{18}y_{16} + a_{27}y_{21}y_{25} - a_{28}y_{24}y_{22} - a_{29} - a_{210}y_2 - a_{211}y_2^2);$$

$$z_4 = \frac{dz_3}{dt} = L_{Y^*}(L_Y^2 T_1(y)) = L_Y(a_{11}\varphi_2) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial(L_Y(a_{11}\varphi_2))}{\partial y_i} \varphi_i =$$

$$= a_{11}[(a_{210} + 2a_{211}y_2)\varphi_2 + a_{11}a_{25}y_{19}\varphi_{15} - a_{11}a_{26}y_{16}\varphi_{18} + a_{11}a_{27}y_{25}\varphi_{21} - a_{11}a_{28}y_{22}\varphi_{24} - a_{11}a_{21}y_7\varphi_3 +$$

$$+ a_{11}a_{23}y_{13}\varphi_9 - a_{11}a_{22}y_4\varphi_6 - a_{11}a_{24}y_{10}\varphi_{12} - a_{11}a_{26}y_{18}\varphi_{16} + a_{11}a_{25}y_{15}\varphi_{19} - a_{11}a_{28}y_{24}\varphi_{22} + a_{11}a_{27}y_{21}\varphi_{25} -$$

$$- a_{11}a_{24}y_{12}\varphi_{10} + a_{11}a_{23}y_9\varphi_{13} - a_{11}a_{22}y_6\varphi_4 + a_{11}a_{21}y_3\varphi_7];$$

$$z_5 = \frac{dz_4}{dt} = L_{Y^*}(L_Y^3 T_1(y)) = \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial(L_{Y^*}(L_Y^3 T_1(y)))}{\partial y_i} \varphi_i.$$

Аналогичным образом, задавшись значениями функций $T_2(y) = y_6 = z_6$, $T_3(y) = y_9 = z_9$, $T_4(y) = y_{12} = z_{12}$, $T_5(y) = y_{15} = z_{15}$, $T_6(y) = y_{18} = z_{18}$, $T_7(y) = y_{21} = z_{21}$, $T_8(y) = y_{24} = z_{24}$, с помощью разработанной программы могут быть получены соотношения для определения остальных переменных модели в форме Бруновского.

На рис. 1 и 2 приведены процессы, полученные с помощью математических моделей (3.7) и (3.8). На рис. 1 с помощью переменных x_1 (модель (3.7)) и z_1 (модель (3.8)) показано изменение во времени пройденного дизель-поездом расстояния при разгоне состава до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути. Как следует из рисунка $x_1 \equiv z_1$. На рис. 2 показаны изменения скорости дизель-поезда, полученные с помощью модели (3.7), переменная x_2 , и модели (3.8), переменная z_2 . как видно из рисунка $x_2 \equiv z_2$. Таким образом, линейная математическая модель в форме Бруновского (3.8) эквивалентна исходной нелинейной модели объекта (3.7).

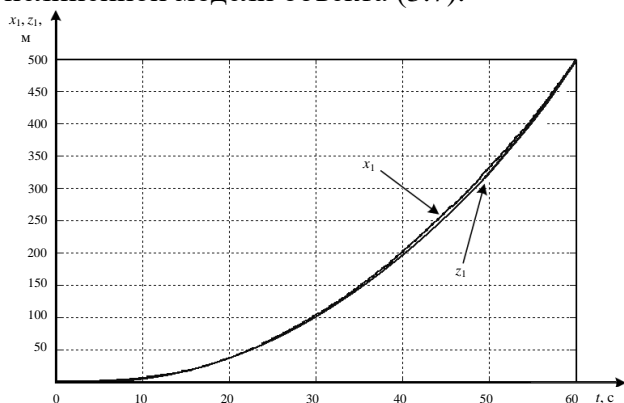


Рис. 1. Поведение переменных x_1 и z_1 во времени.

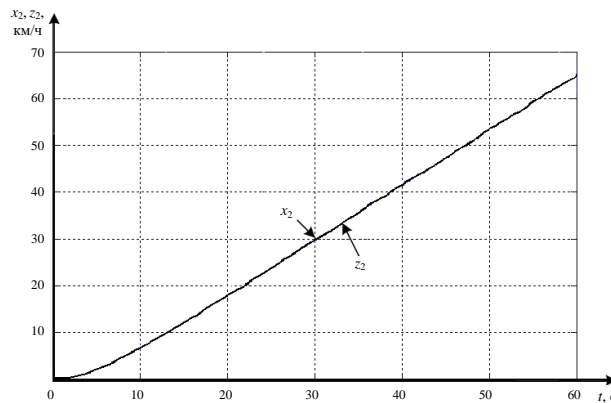


Рис. 2. Поведение переменных x_2 и z_2 во времени.

4. Выводы. Таким образом, для универсального пакета моделирования разработано программное обеспечение, позволяющее автоматизировать сложные аналитические преобразования в геометрической теории управления при получении из нелинейных математических моделей объектов управления эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. С помощью разработанного программного обеспечения получена линейная математическая модель движения дизель-поезда в канонической форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу четырёх тяговых асинхронных двигателей. Полученная модель может использоваться для поиска оптимальных управлений, а также для

исследования процессов буксования и юза, а также параллельной работы двигателей.

Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.
2. Краснощёченко В.И., Грищенко А.П. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 285 с.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.
5. Kim D.P. Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System. – Seoul: Harnol, 2000. – 558 p.
6. Marino R., Tomei P. Nonlinear Control Design. – Prentice Hall Europe, 1995. – 396 p.
7. Краснощёченко В.И. Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28 – 33.
8. Краснощёченко В.И. О линейных эквивалентах нелинейных систем // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – № 575. – С. 39 – 45.
9. Дмитриенко В.Д. Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2007. – № 19. – С. 64-77.
10. Дмитриенко В.Д. Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный. – Х.: Изд. центр "НТМТ", 2013. – 248 с.
11. Дмитриенко В.Д. Синтез оптимальных законов управления тяговым электроприводом методами дифференциальной геометрии и принципа максимума / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 42-51.

UOT 681.5

V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotny

Obyektlərin qeyri-xətti modellərinin ekvivalent xətti modellərə çevrilməsi prosesində simvol hesablamaların avtomatlaşdırılması

Obyektlərin qeyri-xətti modellərinin ekvivalent xətti modellərə çevrilməsini avtomatlaşdırmaq üçün program vasitəsilə işlənmişdir. Onların vasitəsilə "dizel-qatar" hərəkətinin Brunovski formada dörd dartıcı asinxron mühərrikin paralel işini nəzərə alan xətti riyazi modeli sintez edilmişdir. Alınmış model optimal idarəetmənin axtarışı, həmçinin mühərriklərin paralel işinin tədqiq olunması üçün istifadə oluna bilər.

Açar sözlər: Brunovski forması, dizel-qatar hərəkətinin xətti riyazi modeli, işəsalma və əylənmə proseslərinin tədqiqi, mühərriklərin paralel işi

V.D. Dmitrienko, A.Y. Zakovorotny

Automation of symbolic computation in the transformation of non-linear models of objects to the equivalent linear

Software tools to automate transformations of nonlinear models of objects to equivalent linear model have been developed. By means of the developed software, the synthesis of a linear mathematical model of diesel train motion in the Brunovsky form was carried out, which allows for the parallel operation of four traction induction motors. The resulting model can be used to find the optimal controls, as well as for the study of wheel slipping and skidding as well as parallel operation of motors.

Keywords: Brunovsky form, linear mathematical model of diesel train motion, study of slipping and skidding processes, parallel operation of motors

Национальный Технический Университет
«Харьковский Политехнический Институт»

Представлено 05.01.2015