Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXV, No.3, 2015
www.icp.az/2015/3-10.pdf

УДК 519.621.2

В.М. АБДУЛЛАЕВ, С.Г. ТАЛЫБОВ

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Предложен численный метод к решению нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрена краевая задача относительно параболического уравнения с различными вариантами точечного нагружения. Применением методов разностной аппроксимации рассматриваемые задачи приводятся к системам алгебраических уравнений специальной структуры, для решения которых предлагаются параметрические представления, использующие решения вспомогательных линейных систем с трехдиагональными матрицами. Приводятся результаты численных экспериментов и анализ полученных результатов.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, параболическое уравнение, метод сеток, метод прогонки.

1. Введение. В последние годы внимание многих исследователей привлекают задачи, описываемые нагруженными дифференциальными уравнениями с обыкновенными и с частными производными [1, стр.93; 7-8]. Можно привести много примеров, задач, описываемых дифференциальными уравнениями с обыкновенными [9,10] и частными производными, которые встречаются при изучении биологических [1, стр.84] и экологических [2] процессов, процессов подземной гидрогазодинамики [3, стр.76] и других процессов. Они характеризуются тем, что состояния в локальных областях или точках объекта, или/и в локальных интервалах или моментах времени влияют на состояние процесса на всем протяжении времени и во всех точках объекта. К нагруженным уравнениям приводят также математические постановки задач оптимального управления с обратной связью [11, стр.196], в которых обратная связь происходит дискретно в отдельные моменты времени или для объектов с распределенными в пространстве параметрами с отдельными его точками [12].

Отметим, что численные методы решения непосредственно краевых задач, описываемых нагруженными дифференциальными уравнения с обыкновенными и частными производными, развиты сравнительно слабо [4, 5, 7, 11-13].

В данной работе на примере нагруженного параболического уравнения исследуется подход к численному решению краевых задач относительно нагруженных уравнений математической физики, основанный на применении схем метода сеток [16, стр.61]. Подход основан на свойстве суперпозиции решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и использует специальные параметрические представления решений СЛАУ со специфическими структурами, получаемых в результате применения методов разностной аппроксимации краевых задач относительно нагруженных уравнений.

Приводятся результаты численных экспериментов и сравнение с результатами, полученными в работе [14] при применении метода прямых.

2. Постановка задачи. Для изложения предлагаемого подхода к решению краевых задач относительно нагруженных уравнений математической физики в качестве примера рассмотрим процесс, описываемый нагруженным одномерным параболическим уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Im(x,t)u(x,t) + N(x,t)u(x,t) + f(x,t), (x,t) \in \Omega = (0,1) \times (0,T]. \quad (2.1)$$

Здесь $\Im(x,t)$ линейной эллиптической оператор:

$$\Im(x,t) = a_1(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - a_3(x,t), \quad (2.2)$$

$N(x,t)-$ линейный оператор нагружения. В данной работе рассмотрены следующие его виды:

$$N(x,t)u(x,t)=\sum_{s=1}^{l}\hat{b}_s(x,t)u(\hat{x}_s,t), \tag{2.3}$$

$$N(x,t)u(x,t)=\sum_{s=1}^{l}\breve{b}_s(x,t)u(x,\breve{t}_s), \tag{2.4}$$

В выражениях (2.3) - (2.6) точки $\hat{x}_s\in(0,1)$ и моменты времени $\breve{t}_s\in(0,T)$, $s=1,2,\dots,l$ −заданы. Нагружение (2.3) называют точечным в пространстве, (2.4)-точечным нагружением во времени.

Заданы начальные и краевые условия, которые для конкретности определим следующим образом:

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,1], \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=\psi_0(t), \qquad u(l,t)=\psi_1(t),\ \ x\in[0,T], \tag{2.6}$$

причем условия (2.7), (2.8) согласуются:

$$\varphi(0)=\psi_0(0), \qquad \varphi(1)=\psi_1(0), \tag{2.7}$$

Функция $\varphi(x),\psi_0(t),\ \psi_1(t)-$ непрерывны по своим аргументам.

Будем предполагать выполненными в $\overline{\Omega}$ условия дважды непрерывно-дифференцируемости по x и один раз по t коэффициентов уравнения (2.1): $a_i(x,t), f(x,t), \hat{b}_s(x,t), b_s(x,t), \breve{b}_s(x,t)$ и ограниченности функций:

$$0<a_1(x,t)\le c_1,\ |a_2(x,t)|\le c_2,\ \ 0<a_3(x,t)\le c_3,\ \left|{\partial a_3(x,t)}/{\partial x}\right|\le c_4,$$

$$\sum_{s=1}^{l_3}\hat{b}_s^2(x,t),\sum_{s=1}^{l_3}\breve{b}_s^2(x,t),\sum_{s=1}^{l_3}b_s^2(x,t)\le c_5.$$

При этих условиях возможно построение конечноразностных схем аппроксимации задачи (2.1) - (2.6), решение которых сходится к решению исходной непрерывной задачи. Методика получения оценок сходимости решений конечномерных задач относительно нагруженных уравнений и сами оценки приведены в работах авторов [7; 8], поэтому эти вопросы в данной работе не затронуты.

Для численного решения краевых задач относительно нагруженных дифференциальных уравнений, рассмотренных выше, предлагается численный подход, основанный на применении методов сеток, приводящих к решению СЛАУ большой размерности, имеющих специальную, но не трехдиагональную, структуру якобиана. Для решения этих систем предлагаются схемы, подобные методам прогонки [16, стр.35], но более точно их можно отнести к методам, использующих свойство суперпозиции линейных систем, и основанных на специальном представлении их решения с помощью решений вспомогательных линейных систем с трехдиагональными матрицами.

В работах [9; 10; 14] были исследованы схемы решения подобных задач относительно нагруженных дифференциальный уравнений, основанные на методе прямых. На ряду с простотой, связанной со сведением исходной краевой задачи к решению вспомогательных задач Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемая система в общем случае является жесткой. Например, уже при числе прямых, равном 50, жесткость системы, характеризующаяся величиной порядка 10^3, не позволяет получать результаты с приемлемой точностью практически независимо от исходных данных самой исходной задачи.

3. Метод решения. С целью разностной аппроксимации рассматриваемой краевой задачи (2.1) - (2.6) в области Ω введем равномерную сеточную область
$\omega = \{(x_i, t_j): x_i = ih_x, t_j = jh_t,\ i = 0,1,..,N_x,\ j = 0,1,..,N_t, h_x = 1/(N_x+1), h_t = T/N_t\}$,
N_x, N_t–задаются исходя от требуемой точности решения задачи. Будем предполагать, что h_x, h_t таковы, что точки нагружения $\hat{x}_s \in (0;1)$ и $\check{t}_s \in (0,T)$, $s = 1,2,\dots,l$ являются узлами сеточной области ω. Это требование несложно выполнить при сравнительно небольшом числе точек нагружения и достаточно большой требуемой точности решения задачи, т.е. малых h_x, h_t.

Для векторов и матриц и используем следующие обозначения:

$$u^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{N_x}^j)^* = (u(x_1,t_j), u(x_2,t_j), \dots, u(x_{N_x},t_j))^*,$$
$$\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{N_x}))^* = u^0 = (u_1^0, \dots, u_{N_x}^0)^*,$$
$$f^j = (f(x_1,t_j), f(x_2,t_j), \dots, f(x_{N_x},t_j))^*,$$
$$\hat{u} = (u(\hat{x}_1,\check{t}_j), u(\hat{x}_2,\check{t}_j), \dots, u(\hat{x}_l,\check{t}_l))^*,$$
$$\hat{u}^j = (u(\hat{x}_1,t_j), u(\hat{x}_2,t_j), \dots, u(\hat{x}_l,t_l))^*, \quad j = 1,2,..,N_x,$$
$$\check{u}_s = (u(x_1,\check{t}_j), u(x_2,\check{t}_j), \dots, u(x_{N_x},\check{t}_s))^*, \ s = 1,2,..,l,$$
$$B^j = (b_s(x_i,t_j)), \quad i = 1,2,..,N_x, \ s = 1,2,..,l,$$

B_s^j –диагональная матрица размера $N_x \times N_x$ с i– тым диагональным элементом равным $b_s(x_i,t_j)$, $i = 1,2,..,N_x$. Для аппроксимации производных используем формулы:

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h_t} + O(h_t), \quad \frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_x} + O(h_x^2),$$
$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} + O(h_x^2).$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения (2.1) нами будут использованы различные варианты явной и неявной схем [16, стр.80]. А именно дифференциальные операторы и операторы нагружения в уравнений (2.1) независимо друг от друга могут быть аппроксимированы явной и неявной схемами.

Для компактной записи СЛАУ, получаемых в результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (2.1), введем трехдиагональную матрицу $L_1^j = ((L_{1\nu\mu}^j))$ размерности $N_x \times N_x$, ненулевые элементы которой равны:

$$L_{1\nu-1\mu}^j = \frac{2a_1^{\nu-1j} - h_x a_2^{\nu-1j}}{2h_x^2}, \qquad L_{1\nu\mu}^j = -\frac{1}{h_t} - \frac{h_x^2 a_3^{\nu j} + 2a_1^{\nu j}}{h_x^2},$$
$$L_{1\nu+1\mu}^j = \frac{2a_1^{\nu+1j} + h_x a_2^{\nu+1j}}{2h_x^2}, L_{1,1,1}^j = -\frac{1}{h_t} - \frac{h_x^2 a_3^{1j} + 2a_1^{1j}}{h_x^2},$$
$$L_{1,2,1}^j = \frac{2a_1^{2j} + h_x a_2^{2j}}{2h_x^2}, \ L_{1,N_x-1N_x}^j = \frac{2a_1^{N_x-1j} - h_x a_2^{N_x-1j}}{2h_x^2}, L_{1N_xN_x}^j = -\frac{1}{h_t} - \frac{h_x^2 a_3^{N_xj} + 2a_1^{N_xj}}{h_x^2},$$

и диагональную матрицу L_2^j с элементами на диагонали равными $1/h_t$.

3.1. Решение задачи (2.1) - (2.3), (2.7),(2.8).

3.1.1. Несложно проверить, что, если для конечноразностной аппроксимации дифференциального оператора и оператора нагружения в уравнении (2.1) использованы неявные схемы, соответствующие разностные уравнения можно записать в виде:

$$L_1^j u^j + L_2^j u^{j-1} + B^j \hat{u}^j = f^j \ , \ \ j = 1,2, \dots, N_t \, . \tag{3.1}$$

Если для аппроксимации дифференциального уравнения (1.1) использовать только явные схемы, то получим следующие системы алгебраических соотношений:

$$L_1^j u^{j-1} + L_2^j u^j + B^j \hat{u}^{j-1} = f^{j-1} \ , \ \ j = 1,2, \dots, N_t. \tag{3.2}$$

В случае использования неявной схемы для аппроксимации дифференциальной части уравнения и явной для оператора нагружения система дифференциальных уравнений аппроксимируется следующими СЛАУ:

$$L_1^j u^j + L_2^j u^{j-1} + B^j \hat{u}^{j-1} = f^j \ , \ \ j = 1,2, \dots, N_t \, . \tag{3.3}$$

Возможна аппроксимация дифференциальной части уравнения явной схемой, а для оператора нагружения использовать неявную схему:

$$L_1^j u^{j-1} + L_2^j u^j + B^j \hat{u}^j = f^{j-1} \ , \ \ j = 1,2, \dots, N_t \, . \tag{3.4}$$

При аппроксимации дифференциальной части и оператора нагружении неявной схемой получим следующие СЛАУ:

$$L_1^j u^j + L_2^j u^{j-1} + B^j \hat{u}^j = f^j \ , \ \ j = 1,2, \dots, N_t \, . \tag{3.5}$$

Для устойчивости явных схем аппроксимации дифференциальной части уравнения (2.1) необходимо выполнение условия Леви-Фридрихса [16, с.302]:

$$h_t \leq 0.5 h_x^2 \min_{(x,t)\in\Omega} a_1(x,t).$$

Независимо от используемой схемы аппроксимации системы (3.1) - (3.4) решаются последовательно по j, начиная от $j = 1$ до $j = N_t$.

Явная схема (3.2) наиболее проста, практически решать системы алгебраических уравнений не требуется, т.к. все значения u^j, в том числе и в точках нагружения, начиная с $j = 1$ непосредственно вычисляются из (3.2).

Схема (3.3) также не доставляет какой -либо сложности, связанной с участием нагружения, т.к. на каждом слое $t = t_j$ используются уже известные значения функции в точках нагружения на предыдущем временном слое $t = t_{j-1}$. А для решения систем (3.3) можно использовать известные схемы методов прогонки.

Что касается схем (3.4), (3.5), то здесь непосредственно использовать эффективные методы типа прогонки невозможно. Нам понадобятся следующие факты, которые с целью дальнейшего использования дадим в несколько общем виде.

Рассмотрим следующие параметрические заданные СЛАУ относительно u^j, $j = 1,2, \dots, N_t$:

$$A_1^j u^j + A_2^j u^{j-1} + G^j \lambda = F^j \, , \tag{3.6}$$

$$u^0 = \varphi \, . \tag{3.7}$$

Здесь заданные A_1^j, A_2^j −матрицы размерности $N_x \times N_x$, имеющие ранг равный N_x; G^j −матрица размерности $N_x \times m$; $F^j - N_x$-мерный вектор; $\lambda - m$-мерный вектор параметров системы; $\varphi - N_x$ -мерный вектор, $j = 1,2, \dots, N_t$, целые числа m, k −заданы.

Для решения системы (3.6) при каждом $j = 1,2, \dots, N_t$ для произвольных значений векторов параметров λ рассмотрим представление:

$$u^j = V^j + W^j\lambda, \qquad j = 1,2,\dots,N_t, \tag{3.8}$$

где V^j и W^j являются соответственно N_x −мерным вектором и $(N_x \times m)$ -мерной матрицей, $j = 1,2,\dots,N_t$.

Обозначим через $0_{N_x\times N_x}$ нулевую матрицу размерности $N_x \times N_x$.

Лемма 3.1. *Представление (3.8) является решением системы (3.6) для произвольных значений векторов параметров λ, если V^j и W^j являются решением следующих систем векторных и матричных систем алгебраических уравнений:*

$$A_1^j V^j + A_2^j V^{j-1} - F^j = 0_{N_x}, \tag{3.9}$$

$$V^0 = \varphi, \tag{3.10}$$

$$A_1^j W^j + A_2^j W^{j-1} + G^j = 0_{N_x\times m}, \tag{3.11}$$

$$W^0 = 0_{N_x\times m}, \tag{3.12}$$

и обратно, если V^j, W^j −есть решения систем (3.9) – (3.12), то решение системы (3.6)–(3.7) можно представить в виде (3.8).

Доказательство. Пусть решение системы (3.6) имеет представление (3.8). Тогда при $j = 0$ очевидно, что из (3.10) и (3.12) следует (3.7). Подставим (3.8) в (3.6) при $j \geq 1$:

$$A_1^j\left[V^j + W^j\lambda\right] + A_2^j\left[V^{j-1} + W^{j-1}\lambda\right] + G^j\lambda = F^j, \tag{3.13}$$

после группировки получим:

$$\left[A_1^j V^j + A_2^j V^{j-1} - F^j\right] + \left[A_1^j W^j + A_2^j W^{j-1} + G^j\right]\lambda = 0 .$$

В силу произвольности значений векторов параметров λ, необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках были равно 0_{N_x} , т.е. выполнены условия (3.9), (3.11).

И обратно, если V^j, W^j-есть решения системы (3.9) - (3.12), то умножив (3.11) при каждом s на произвольный вектор параметров λ и все их сложив с (3.9), получим тождество (3.6), в котором имеет место обозначение (3.8).

Лемма 3.2. *Представление (3.8) для системы (3.6), (3.7) для произвольных значений векторов параметров λ, единственно.*

Доказательство. Пусть кроме (3.8) имеет место представление

$$u^j = \hat{V}^j + \widehat{W}^j\lambda, \qquad j = 0,1,\dots,N_t, \tag{3.14}$$

Подставив (3.14) в (3.6) получим:

$$A_1^j\left[\hat{V}^j + \widehat{W}^j\lambda\right] + A_2^j\left[\hat{V}^{j-1} + \widehat{W}^{j-1}\lambda\right] + G^j\lambda = F^j. \tag{3.15}$$

Ясно, что из (3.7) в силу произвольности λ необходимо, чтоб имело место:

$$V^0 = \hat{V}^0 = \varphi, \quad W^0 = \widehat{W}^0 = 0_{N_x\times m}$$

Последовательно, начиная с $j = 1$ по методу индукции, предполагая, что $V^{j-1} = \hat{V}^{j-1}$, $W^{j-1} = \widehat{W}^{j-1}$, будем вычитать из формулы (3.13) формулу (3.15), после группировки получим:

$$A_1^j\left[(V^j - \hat{V}^j) + (W^j - \widehat{W}^j)\lambda\right] + A_2^j\left[(V^{j-1} - \hat{V}^{j-1}) + (W^{j-1} - \widehat{W}^{j-1})\lambda\right] = 0_{N_x},$$

$$A_1^j\left[(V^j - \hat{V}^j) + (W^j - \widehat{W}^j)\lambda\right] = 0_{N_x}.$$

Учитывая, что $rang\, A_1 = N_x$ тогда необходимо, чтобы вектор в квадратных скобках был тривиальным, т.е.

$$(V^{j-1} - \hat{V}^{j-1}) + (W^{j-1} - \widehat{W}^{j-1})\lambda = 0_{N_x}.$$

Учитывая произвольность значений вектора параметров λ_s^j, то необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$V^j = \hat{V}^j\ ,\ \ W^j = \widehat{W}^j,\ j = 1{,}2\ldots, N_t\ .$$

Отсюда следует единственность представления (3.8).

Вернемся к схеме аппроксимации (3.4). Для определения решения u^j , $j = 1,2,\ldots,N_t$, $u^0 = \varphi$ используем представление

$$u^j = V^j + W^j\hat{u}^j\ , j = 1,2,\ldots,N_t, \tag{3.16}$$

(в данном случае $k = 1$). Тогда, предполагая, что для каждого $j-$того слоя (системы) в качестве параметра λ служит вектор $\hat{u}^j$, согласно лемме1, независимо от значений в точках нагружения $\hat{u}^j$ векторы и матрицы V^j, W_s^j должны быть решением систем:

$$L_1^j V^{j-1} + L_2^j V^j = f^{j-1}\ , j = 1,2,\ldots,N_t, \qquad V^0 = \varphi\ , \tag{3.17}$$

$$L_1^j W^{j-1} + L_2^j W^j = -B^j\ \ , j = 1,2,\ldots,N_t, \qquad W^0 = 0. \tag{3.18}$$

Каждая из систем решается независимо с одной стороны, с другой стороны в силу того, что L_2^j −диагональная матрица, то она легко обратима $\left(L_{2\nu\mu}^j\right)^{-1} = 0$, если $\nu\neq\mu$, $\left(L_{2\nu\nu}^j\right)^{-1} = h_t$, и решение определяется так:

$$V^j = \left(L_2^j\right)^{-1}\left\lfloor f^{j-1} - L_1^j V^{j-1}\right\rfloor,$$
$$W^j = \left(L_2^j\right)^{-1}\left\lfloor -B^j - L_1^j W^{j-1}\right\rfloor,$$

последовательно для $j = 1$ до $j = N_t$.

Для определения значений $\hat{u}^j = (u(\hat{x}_1,t_j), u(\hat{x}_2,t_j),\ldots,u(\hat{x}_l,t_j))^*$ при каждом $t = t_j$, пользуясь представлением (3.16) и найденными значениями $V^j = (V_1^j, V_2^j,\ldots,V_{N_x}^j)^*$ и $V^j = (W_1^j, W_2^j,\ldots,W_{N_x}^j)^*$, составляются l алгебраических уравнений для значений $u(x,t)$ в l точках нагружения при $t = t_j$;

$$u(\hat{x}_s,t_j) = V^j(\hat{x}_s,t_j) + \sum_{s=1}^{l} W_s^j(\hat{x}_s,t_j)u(\hat{x}_s,t_j). \tag{3.19}$$

Определив вектор $\hat{u}^j$, из (3.16) находится весь вектор $u^j = (u(x_1,t_j), u(x_2,t_j),\ldots,u(x_{N_x},t_j))^*$. Эта процедура проводится для всех $j,\ j = 1,2,\ldots,N_t$.

3.1.2. В случае применения неявной схемы (3.5) используется представление (3.16), но тогда основные матрицы вспомогательных СЛАУ L_1^j −представляют собой трехдиагональные матрицы,

$$L_1^j V^j + L_2^j V^{j-1} = f^j\ , \qquad j = 1,2,\ldots,N_t, \quad V^0 = \varphi\ , \tag{3.20}$$

$$L_1^j W^j + L_2^j W^{j-1} = -B^j\ \ , \quad j = 1,2,\ldots,N_t,\ \ W^0 = 0. \tag{3.21}$$

Для решения (3.20), (3.21) можно использовать методы прогонки. После этого для точек нагружения снова формируется система (3.19), решение которой как и выше используется для получения вектора u^j, $j = 1,2,\ldots,N_t$.

3.2. Решение задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.7), (2.8).

Пусть для аппроксимации задачи использована неявная схема метода сеток, которую можно записать в виде:

$$L_1^j u^j + L_2^j u^{j-1} + \sum_{s=1}^{l} B_s^j \breve{u}_s = F^j\ , j = 1,2,\ldots,N_t, \tag{3.22}$$

$$u^0 = \varphi. \tag{3.23}$$

Здесь B_s^j −диагональная матрица, у которой

$$B_{s\nu\nu}^j = b_s(x_\nu, t_j), \quad \nu = 1,2,\dots,N_x,$$

$B_{s\nu\mu}^j = 0$, если $\nu \neq \mu$, $\nu, \mu = 1,2,\dots,N_t$, $\breve{u}_s = (u(x_1,\breve{t}_s), u(x_2,\breve{t}_s),\dots,u(x_{N_x},\breve{t}_s))^*$-$N_x$-мерный вектор.

Предполагая, что совокупность значений нагружения $\breve{u}_s$, $s = 1,2,\dots,l$, есть вектор параметров $\lambda = (\breve{u}_1, \breve{u}_2, \dots, \breve{u}_l)^*$, согласно леммам 1,2, решение системы (3.22), (3.23) будем искать в виде представления:

$$u^j = V^j + \sum_{s=1}^{l} W_s^j \breve{u}_s. \tag{3.24}$$

Здесь $V^j - N_x$-мерный вектор, $W_s^j - N_x \times N_x$-мерная матрица, $j = 1,2,\dots,N_t$, $s = 1,2,\dots,l$, которые для каждого j , $j = 1,2,\dots,N_t$, являются решением следующих СЛАУ с основной трехдиагональной матрицей L_1^j:

$$L_1^j V^j + L_2^j V^{j-1} = F^j \, , j = 1,2,\dots,N_t, \qquad V^0 = \varphi \, , \tag{3.25}$$

$$L_1^j W_s^j + L_2^j W_s^{j-1} = -B_s^j \, , j = 1,2,\dots,N_t, \; W_s^0 = 0_{N_x \times N_x} \, , s = 1,2,\dots,l. \tag{3.26}$$

Решив системы (3.25), (3.26) методом прогонки, используя значения векторов и матриц V^j и W_s^j только в моменты нагружения $\breve{t}_s$, из представления (3.24) получим систему относительно $u_s \in R^{N_x}$, $s = 1,2,\dots,l$, которую запишем в следующем виде:

$$u(x_\nu, \breve{t}_s) = V^j(x_s, \breve{t}_s) + \sum_{s=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{N_x} W_s^j(x_\nu, \breve{t}_s) u(x_\nu, \breve{t}_s) \, . \tag{3.27}$$

Система (3.27) не обладает какой-либо специальной структурой и поэтому для ее решения необходимо использовать общие известные методы (точные или итерационные) решения СЛАУ.

Несложно получить формулы в случае использования явной схемы по аналогии с вышеприведенной неявной схемой аппроксимации (3.22), (3.23) уравнения (2.1):

$$L_1^j u^{j-1} + L_2^j u^j + \sum_{s=1}^{l} B_s^{j-1} \hat{u}_s = F^{j-1} \, , \; u^0 = \varphi \, . \tag{3.28}$$

Ясно, что у вспомогательных СЛАУ на каждом временном слое $t = t_j$ основная матрица будет диагональной, а величины нагружения $\breve{u}_s$, $s = 1,2,\dots,l$, будут определяться из такой же СЛАУ общего вида как и системы (3.27).

4. Результаты численных экспериментов и их анализ. Было проведено большое количество численных экспериментов по решению различных тестовых задач с использованием как предложенных в данной работе вычислительных схем на основе разностных аппроксимаций, так и подхода, основанного на применении метода прямых, исследованного в работах [14,15].

Учитывая требуемый большой объем как исходной информации о постановке задачи, так и информации о параметрах, использованных в проведенных численных экспериментах, мы представим результаты и анализ решения лишь на примере следующих двух тестовых задач.

Задача 1. Пусть процесс описывается следующим нагруженным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (x+t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (2x-t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - (x-3t)u(x,t) + 5(x+t)u(0.3,t) +$$
$$+2(x-2t)u(0.8,t) + (2x^3 - 6x^2 t - 8x^2 + 4xt - 8.86x - 0.22t)\cos(t) -$$
$$-2x^2\sin(t) - 6x - 4t\,, (x,t) \in \Omega = \{(x,t): 0 < x < 1,\ \ 0 < t \le 1\},$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$u(x,0) = 2x^2 + 1, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 2cost + 1,\ \ 0 \le t \le 1\,.$$

Несложно проверить, что все необходимые условия на исходные данные, функции, участвующие в постановке задачи, выполнены, а точным решением задачи является функция $u(x,t) = 2x^2 cost + 1$.

Пространственные нагружения сосредоточены в двух точках $\hat{x}_1 = 0.3$, $\hat{x}_2 = 0.8$ ($l_1 = 2$).

Экспериментальный анализ решения приведенных задач показал, что для получения численных результатов с требуемой точностью при использовании разных методов необходимо подбирать значения для их различных эффективных параметров. А именно, при использовании явных схем метода сеток необходимо, чтобы число узлов сеточной области N_x и N_t было не менее, чем соответственно $N_x = 50(h_x = 0.02)$, $N_t = 1000(h_t = 0.001)$, ,для неявных схем метода сеток эти значения были выбраны $N_x = 20, N_t = 200$. При меньших значениях этих параметров погрешность получаемых результатов решения существенно различалась от приводимых в таблицах. Для метода прямых количество N прямых $x = x_k = kh$, $k = 0,1,\ldots,N+1$ было взято равным 30, т.к. дальнейшее увеличение N приводило к худшим результатам из - за повышения степени жесткости системы обыкновенными дифференциальный уравнений, а для решения вспомогательных задач Коши относительно СОДУ был использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка с $h = 0.005$. Для решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей, получаемых при применении неявных схем аппроксимации дифференциального оператора, использовался метод прогонки. Для решения СЛАУ относительно значений искомой функции в точках нагружения (системы (3.19), (3.27)) использовался метод Гаусса с выбором главного члена.

В каждой клетке таблицы 1 приведены значения $u(x_i, t_i)$ в точках сеточной области $x_i = 0.1i$, $t_j = 0.1j$, $i = 1,2,\ldots,9$, $j = 1,2,\ldots,10$ для точного решения задачи 1 (строка1), а также результаты численного решения при использовании: неявных схем при аппроксимации дифференциального оператора и оператора нагружения (строка 2), неявной схемы для дифференциального оператора и явной для оператора нагружения (строка 3), явной схемы для дифференциального оператора и неявной для оператора нагружения (строка 4), явных схем для дифференциального оператора и оператора нагружения (строка 5), и метода прямых(строка 6).

Таблица 1

Результаты решения задачи 1

t \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	**1.0199** 1.0199 1.0196 1.0197 1.0195	**1.0796** 1.0796 1.0793 1.0795 1.0792	**1.1791** 1.1791 1.1788 1.1788 1.1786	**1.3184** 1.3184 1.3181 1.3177 1.3179	**1.4975** 1.4975 1.4971 1.4972 1.4970	**1.7164** 1.7164 1.7161 1.7162 1.7159	**1.9751** 1.9751 1.9748 1.9748 1.9747	**2.2736** 2.2737 2.2734 2.2735 2.2732	**2.6119** 2.6120 2.6117 2.6117 2.6113

	1.0198	1.0794	1.1789	1.3181	1.4973	1.7161	1.9748	2.2733	2.6117
0.2	**1.0196**	**1.0784**	**1.1764**	**1.3136**	**1.4900**	**1.7056**	**1.9605**	**2.2545**	**2.5877**
	1.0196	1.0784	1.1764	1.3136	1.4901	1.7057	1.9605	2.2546	2.5878
	1.0193	1.0780	1.1761	1.3132	1.4898	1.7054	1.9601	2.2542	2.5876
	1.0194	1.0781	1.1762	1.3134	1.4899	1.7054	1.9602	2.2543	2.5876
	1.0191	1.0779	1.1759	1.3131	1.4896	1.7051	1.9600	2.2542	2.5874
	1.0194	1.0782	1.1763	1.3134	1.4900	1.7055	1.9602	2.2543	2.5874
0.3	**1.0191**	**1.0764**	**1.1720**	**1.3057**	**1.4777**	**1.6878**	**1.9362**	**2.2228**	**2.5476**
	1.0191	1.0764	1.1720	1.3057	1.4777	1.6879	1.9364	2.2230	2.5478
	1.0188	1.0761	1.1717	1.3054	1.4774	1.6876	1.9361	2.2226	2.5476
	1.0189	1.0761	1.1718	1.3054	1.4773	1.6877	1.9360	2.2224	2.5476
	1.0186	1.0761	1.1715	1.3051	1.4771	1.6873	1.9358	2.2226	2.5473
	1.0189	1.0762	1.1718	1.3054	1.4774	1.6876	1.9360	2.2225	2.5475
0.4	**1.0184**	**1.0737**	**1.1658**	**1.2947**	**1.4605**	**1.6632**	**1.9026**	**2.1790**	**2.4921**
	1.0184	1.0737	1.1658	1.2948	1.4606	1.6633	1.9028	2.1792	2.4923
	1.0181	1.0734	1.1654	1.2944	1.4602	1.6629	1.9023	2.1787	2.4921
	1.0182	1.0735	1.1657	1.2946	1.4604	1.6631	1.9025	2.1789	2.4919
	1.0179	1.0732	1.1652	1.2943	1.4601	1.6628	1.9021	2.1785	2.4916
	1.0181	1.0735	1.1655	1.2945	1.4602	1.6630	1.9023	2.1787	2.4919
0.5	**1.0176**	**1.0702**	**1.1580**	**1.2808**	**1.4388**	**1.6319**	**1.8600**	**2.1233**	**2.4217**
	1.0176	1.0702	1.1580	1.2809	1.4389	1.6320	1.8602	2.1236	2.4220
	1.0173	1.0698	1.1577	1.2805	1.4386	1.6316	1.8597	2.1230	2.4213
	1.0174	1.0700	1.1578	1.2806	1.4385	1.6317	1.8597	2.1231	2.4214
	1.0171	1.0697	1.1573	1.2802	1.4383	1.6314	1.8596	2.1228	2.4211
	1.0174	1.0701	1.1578	1.2806	1.4386	1.6317	1.8598	2.1231	2.4214
0.6	**1.0165**	**1.0660**	**1.1486**	**1.2641**	**1.4127**	**1.5942**	**1.8088**	**2.0564**	**2.3370**
	1.0165	1.0660	1.1486	1.2642	1.4128	1.5944	1.8091	2.0568	2.3374
	1.0162	1.0657	1.1483	1.2638	1.4124	1.5938	1.8085	2.0560	2.3367
	1.0163	1.0658	1.1484	1.2639	1.4125	1.5939	1.8086	2.0562	2.3368
	1.0163	1.0665	1.1491	1.2647	1.4131	1.5948	1.8097	2.0568	2.3379
	1.0163	1.0659	1.1485	1.2640	1.4125	1.5940	1.8086	2.0562	2.3368
0.7	**1.0153**	**1.0612**	**1.1377**	**1.2447**	**1.3824**	**1.5507**	**1.7495**	**1.9790**	**2.2390**
	1.0153	1.0612	1.1377	1.2448	1.3826	1.5509	1.7498	1.9794	2.2394
	1.0156	1.0615	1.1380	1.2452	1.3827	1.5512	1.7500	1.9796	2.2398
	1.0154	1.0614	1.1379	1.2449	1.3826	1.5509	1.7497	1.9796	2.2396
	1.0158	1.0617	1.1382	1.2453	1.3831	1.5512	1.7501	1.9799	2.2399
	1.0152	1.0611	1.1375	1.2445	1.3820	1.5405	1.7494	1.9787	2.2387
0.8	**1.0139**	**1.0557**	**1.1254**	**1.2229**	**1.3484**	**1.5016**	**1.6828**	**1.8918**	**2.1287**
	1.0139	1.0558	1.1255	1.2230	1.3485	1.5019	1.6831	1.8922	2.1292
	1.0142	1.0562	1.1259	1.2233	1.3488	1.5022	1.6834	1.8925	2.1294
	1.0141	1.0560	1.1257	1.2233	1.3488	1.5022	1.6834	1.8925	2.1293
	1.0144	1.0562	1.1261	1.2235	1.3490	1.5024	1.6837	1.8925	2.1296
	1.0137	1.0556	1.1250	1.2227	1.3481	1.5014	1.6825	1.8905	2.1283
0.9	**1.0124**	**1.0497**	**1.1119**	**1.1989**	**1.3108**	**1.4476**	**1.6092**	**1.7957**	**2.0070**
	1.0124	1.0498	1.1120	1.1990	1.3110	1.4478	1.6095	1.7960	2.0074
	1.0127	1.0501	1.1122	1.1992	1.3112	1.4481	1.6099	1.7965	2.0079
	1.0126	1.0499	1.1121	1.1991	1.3111	1.4479	1.6097	1.7962	2.0076
	1.0129	1.0503	1.1124	1.1995	1.3113	1.4482	1.6101	1.7963	2.0078
	1.0121	1.0494	1.1117	1.1988	1.3105	1.4474	1.6090	1.7954	2.0067
1.0	**1.0108**	**1.0432**	**1.0973**	**1.1729**	**1.2702**	**1.3890**	**1.5295**	**1.6916**	**1.8753**
	1.0108	1.0433	1.0973	1.1730	1.2704	1.3892	1.5297	1.6919	1.8757
	1.0111	1.0435	1.0976	1.1734	1.2706	1.3894	1.5299	1.6921	1.8760

	1.0110	1.0434	1.0975	1.1731	1.2705	1.3893	1.5298	1.6919	1.8758
	1.0113	1.0437	1.0978	1.1736	1.2710	1.3897	1.5303	1.6925	1.8762
	1.0107	1.0430	1.0971	1.1728	1.2700	1.3887	1.5292	1.6913	1.8750

Задача 2. Пусть процесс описывается следующей краевой задачей относительно нагруженного уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (x+2t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - 2u(x,t) + (2x-t)u(x,0.2) + (x-t)u(x,0.6) -$$

$$-4xt + 2t + 2\,cos(t) + 4\,sin(t) - 1 - (2x-t)(2\,sin(0.2) + x^2 + 0.2) +$$

$$+(x-t)(2\,sin(0.6) + x^2 + 0.6, \quad (x,t) \in \Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, \ \ 0 < t \le 1\}$$

$$u(x,0) = x^2\,, \quad 0 \le x \le l\,,$$

$$u(0,t) = 2\sin(t) + t\,, \qquad u(1,t) = 2\sin(t) + t + 1, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Нагружения по времени сосредоточены в двух моментах времени:
$\breve{t}_1 = 0.2, \breve{t}_1 = 0.6$ $(l = 2)$.
Не сложно проверить, что точным решением задачи является функция:
$u(x,t) = 2\sin t + x^2 + t.$
В таблице 2 приведены результаты, полученные при численном решении данной задачи, в той же форме, что и в таблице 1 для задачи 1.

Таблица 2

Результаты решения задачи 2

t \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	**0.3097**	**0.3397**	**0.3897**	**0.4597**	**0.5497**	**0.6597**	**0.7897**	**0.9397**	**1.1097**
	0.3097	0.3397	0.3897	0.4597	0.5497	0.6597	0.7897	0.9397	1.1097
	0.3101	0.3401	0.3899	0.4600	0.5499	0.6600	0.7899	0.9401	1.1100
	0.3100	0.3400	0.3899	0.4600	0.5499	0.6600	0.7899	0.9399	1.1099
	0.3102	0.3402	0.3902	0.4603	0.5503	0.6603	0.7902	0.9402	1.1102
	0.3097	0.3397	0.3897	0.4597	0.5497	0.6597	0.7897	0.9397	1.1097
0.2	**0.6073**	**0.6373**	**0.6873**	**0.7573**	**0.8473**	**0.9573**	**1.0873**	**1.2373**	**1.4073**
	0.6074	0.6374	0.6874	0.7574	0.8474	0.9574	1.0874	1.2374	1.4074
	0.6076	0.6376	0.6876	0.7576	0.8476	0.9577	1.0877	1.2377	1.4076
	0.6075	0.6375	0.6875	0.7575	0.8475	0.9575	1.0875	1.2375	1.4075
	0.6078	0.6378	0.6879	0.7579	0.8478	0.9579	1.0879	1.2378	1.4079
	0.6073	0.6373	0.6873	0.7573	0.8473	0.9573	1.0873	1.2373	1.4073
0.3	**0.9010**	**0.9310**	**0.9810**	**1.0510**	**1.1410**	**1.2510**	**1.3810**	**1.5310**	**1.7010**
	0.9011	0.9311	0.9811	1.0511	1.1411	1.2511	1.3811	1.5311	1.7011
	0.9014	0.9314	0.9813	1.0514	1.1413	1.2513	1.3814	1.5314	1.7014
	0.9012	0.9312	0.9812	1.0511	1.1412	1.2511	1.3812	1.5312	1.7012
	0.9015	0.9316	0.9815	1.0516	1.1415	1.2515	1.3815	1.5315	1.7015
	0.9010	0.9310	0.9810	1.0510	1.1410	1.2510	1.3810	1.5310	1.7010
0.4	**1.1888**	**1.2188**	**1.2688**	**1.3388**	**1.4288**	**1.5388**	**1.6688**	**1.8188**	**1.9888**
	1.1889	1.2189	1.2689	1.3389	1.4289	1.5389	1.6689	1.8189	1.9889
	1.1893	1.2193	1.2693	1.3394	1.4292	1.5392	1.6693	1.8193	1.9893
	1.1891	1.2191	1.2691	1.3390	1.4290	1.5390	1.6690	1.8191	1.9890
	1.1893	1.2194	1.2695	1.3396	1.4296	1.5396	1.6696	1.8196	1.9896

	1.1888	1.2188	1.2688	1.3388	1.4288	1.5388	1.6688	1.8188	1.9888
0.5	**1.4689**	**1.4989**	**1.5489**	**1.6189**	**1.7089**	**1.8189**	**1.9489**	**2.0989**	**2.2689**
	1.4689	1.4989	1.5490	1.6190	1.7090	1.8190	1.9490	2.0989	2.2689
	1.4693	1.4993	1.5493	1.6193	1.7093	1.8193	1.9493	2.0992	2.2691
	1.4690	1.4990	1.5491	1.6191	1.7091	1.8191	1.9491	2.0990	2.2690
	1.4694	1.4994	1.5494	1.6194	1.7093	1.8195	1.9494	2.0994	2.2694
	1.4689	1.4989	1.5489	1.6189	1.7089	1.8189	1.9489	2.0989	2.2689
0.6	**1.7393**	**1.7693**	**1.8193**	**1.8893**	**1.9793**	**2.0893**	**2.2193**	**2.3693**	**2.5393**
	1.7393	1.7694	1.8194	1.8894	1.9794	2.0894	2.2194	2.3694	2.5393
	1.7396	1.7696	1.8197	1.8896	1.9796	2.0896	2.2196	2.3697	2.5396
	1.7395	1.7695	1.8194	1.8895	1.9795	2.0895	2.2195	2.3695	2.5395
	1.7398	1.7698	1.8198	1.8898	1.9798	2.0899	2.2199	2.3699	2.5399
	1.7393	1.7693	1.8193	1.8893	1.9793	2.0893	2.2193	2.3693	2.5393
0.7	**1.9984**	**2.0284**	**2.0784**	**2.1484**	**2.2384**	**2.3484**	**2.4784**	**2.6284**	**2.7984**
	1.9985	2.0285	2.0786	2.1486	2.2386	2.3485	2.4785	2.6285	2.7985
	1.9987	2.0287	2.0789	2.1487	2.2387	2.3487	2.4787	2.6288	2.7988
	1.9986	2.0286	2.0786	2.1486	2.2386	2.3486	2.4785	2.6285	2.7986
	1.9989	2.0289	2.0789	2.1490	2.2390	2.3490	2.4790	2.6291	2.7990
	1.9984	2.0284	2.0784	2.1485	2.2385	2.3485	2.4785	2.6284	2.7984
0.8	**2.2447**	**2.2747**	**2.3247**	**2.3947**	**2.4847**	**2.5947**	**2.7247**	**2.8747**	**3.0447**
	2.2448	2.2748	2.3249	2.3949	2.4849	2.5949	2.7249	2.8748	3.0448
	2.2451	2.2751	2.3250	2.3950	2.4851	2.5950	2.7251	2.8751	3.0451
	2.2449	2.2749	2.3249	2.3949	2.4849	2.5949	2.7249	2.8749	3.0449
	2.2452	2.2753	2.3253	2.3953	2.4852	2.5953	2.7253	2.8753	3.0453
	2.2447	2.2747	2.3247	2.3947	2.4847	2.5947	2.7247	2.8747	3.0447
0.9	**2.4767**	**2.5067**	**2.5567**	**2.6267**	**2.7167**	**2.8267**	**2.9567**	**3.1067**	**3.2767**
	2.4767	2.5068	2.5568	2.6269	2.7169	2.8269	2.9568	3.1068	3.2767
	2.4770	2.5071	2.5570	2.6271	2.7171	2.8271	2.9571	3.1071	3.2771
	2.4772	2.5072	2.5572	2.6271	2.7172	2.8273	2.9573	3.1073	3.2772
	2.4767	2.5068	2.5568	2.6269	2.7169	2.8269	2.9568	3.1068	3.2767
	2.4767	2.5067	2.5567	2.6267	2.7167	2.8267	2.9567	3.1067	3.2767
1.0	**2.6929**	**2.7229**	**2.7729**	**2.8429**	**2.9329**	**3.0429**	**3.1729**	**3.3229**	**3.4929**
	2.6930	2.7230	2.7730	2.8431	2.9331	3.0431	3.1731	3.3231	3.4930
	2.6933	2.7233	2.7733	2.8434	2.9335	3.0435	3.1734	3.3234	3.4933
	2.6931	2.7231	2.7731	2.8432	2.9332	3.0432	3.1732	3.3232	3.4931
	2.6934	2.7234	2.7735	2.8436	2.9336	3.0436	3.1735	3.3236	3.4936
	2.6930	2.7230	2.7730	2.8430	2.9330	3.0430	3.1730	3.3230	3.4930

Из таблиц 1 и 2 видно, что наиболее точными и надежными являются неявные схемы аппроксимации. Результаты проведенных других экспериментов показали, что для неявных схем есть резерв повышения точности получаемых результатов за счет увеличения количества узлов сеточной области. Таких резервов у других схем решения задачи практически не имелось. Важно отметить, что эксперименты показали, что для получения результатов с высокой точностью необходимо оператор нагружения аппроксимировать неявной схемой, точность аппроксимации дифференциального оператора для явной и неявный схем в определенной степени можно улучшать за счет уменьшения шагов h_t, h_x. С другой стороны, явные схемы аппроксимации оператора нагружения при неявной аппроксимации дифференциального оператора существенно упрощают алгоритм решения задачи в целом и позволяют получать результаты в определенной степени достаточно хорошо характеризующие качественную картину процесса.

5. Выводы. В работе исследовано применение различных схем конечноразностной аппроксимации краевой задачи относительно точечно нагруженного параболического уравнения. Для каждый из схем аппроксимации приведены методика решения исходной задачи и результаты численных экспериментов. Проведено сравнение полученных результатов при использовании различных схем аппроксимации, а также с подходом решения нагруженных краевых задач, использующем метод прямых.

Проведенные исследования несложно распространить на другие виды нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе для большей размерности фазового пространства и при различных других краевых условиях.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М., Наука, 2012, 232 стр.
2. Нахушеев А.М., Борисов В.Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13.№1. стр. 105–110.
3. Анохин Ю.А., Горстко А.Б., Дамешек Л.Ю. и др. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом. Новосибирск: Наука, 1987.
4. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2004. Т. 44. №4. стр.694–716.
5. Худалов М.З. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа // Владикавк. матем. журнал. 2002. Т.4. №4. стр.59–64
6. Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. №1. стр.77-179.
7. Алиханов А.А, Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2008. Т.48. №9. стр.1619-1628.
8. Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2009. Т.49.№ 7. стр. 1223–1231
9. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2004. Т.44. № 9. стр.1585-1595.
10. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и математической физики. Москва, 2014. Т.54. №7. стр.1096–1109.
11. Егоров А. И. Основы теории управления, Физматлит, М., 2004, 504 стр.
12. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автомат. и телемеханика. 2012. №9. стр.3-19.
13. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численные решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2006. Т.46. №9. стр.1566-1581.
14. Абдуллаев В.М. О применении метода прямых для краевой задачи с нелокальными условиями относительно нагруженного параболического уравнения // Известия НАН Азербайджана, серия ФТМН. 2008. Т.28. №3. стр.76–81.
15. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Ann.. 1930. Vol.102. № 1. Pp. 650–670.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989, 616 стр.

UOT 519.622.2

V.M. Abdullayev, S.Q. Talıbov

Riyazi fizikanın yüklənmiş tənliklərinin ədədi həlli haqqında

İşdə xüsusi törəməli yüklənmiş diferensial tənliyin ədədi həll üsulu təklif olunmuşdur. Müxtəlif variantlarda nöqtəvi yüklənməyə malik parabolik tip tənlik üçün sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Baxılan məsələ sonlu-fərqlərlə aproksimasiya üsullarını tətbiq edilməklə xüsusi strukturlu cəbri tənliklər sisteminə gətirilmişdir. Alınan sistemin həlli üçün köməkçi üçdiaqonallı matrisli xətti sistemlərin həllindən istifadə olunan parametrik ayrılış təklif olunmuşdur.

Ədədi hesablama eksperimentlərinin nəticələri və onların analizi verilmişdir.

Açar sözlər: yüklənmiş diferensial tənlik, parabolik tənlik, şəbəkə üsulu, qovma üsulu

V.M. Abdullayev, S.G. Talibov

On a numerical solution to the loaded mathematical physics equations

The article is dedicated to a numerical solution to the loaded partial differential equations. As an illustration, we consider a boundary-value problem for a parabolic equation with different versions of point loading. By applying difference approximation methods, the considered problems are reduced to the solution to systems of algebraic equations of a special structure. To solve these systems, we propose methods that use the solution to well-structured algebraic systems. The results of some numerical experiments and their analysis are given.

Keywords: loaded differential equation, parabolic equation, finite-difference method, sweep method

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 14.01.15