Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXV, No.3, 2015
www.icp.az/2015/3-11.pdf

УДК 517.977

Э.А. ГАРАЕВА, К.Б. МАНСИМОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Изучается одна задача оптимального управления дискретными системами. При предположении открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: дискретная задача оптимального управления, вариация функционала, аналог уравнения Эйлера, необходимое условие оптимальности второго порядка

1. Введение. В работе [1] (см. также [2]) изучается одна непрерывная задача оптимального управления, занимающая как-бы промежуточное положение между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. В работе [3] нами изучен дискретный аналог этой задачи и установлены необходимые условия оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума, а также выведен аналог уравнения Эйлера.

В предлагаемой же работе, при предположении открытости области управления, выведены необходимые условия оптимальности второго порядка для задачи из [3].

2. Постановка задачи. Допустим, что закон движения управляемого объекта описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f\big(t,x,z(t,x),u(t)\big)\,,\qquad t=\ t_0,t_0+1,\dots,t_1-1, x=x_0,x_0+1,\dots,x_1 \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=y(x)\,,\qquad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{2.2}$$

где $y(x)-n$ -мерная вектор-функция являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{gathered} y(x+1)=g\big(x,y(x),v(x)\big)\,,\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,\\ y(x_0)=y_0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $\big(g(x,y,v)\big)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) $\big((y,v)\big)$ до второго порядка включительно, y_0 — заданный постоянный вектор, $t_0,\ t_1,\ x_0,\ x_1$ — заданные числа, причем t_1-t_0 и x_1-x_0 — есть натуральные числа, $\varphi_1(y),\ \varphi_2(x,z)$ — заданные скалярные функции непрерывные по совокупности переменных вместе с $\partial\varphi_1(y)/\partial y$, $\partial^2\varphi_1(y)/\partial y^2$, $\partial\varphi_2(x,z)/\partial z$, $\partial^2\varphi_2(x,z)/\partial z^2$, $u(t)$ $\big(v(x)\big)$ – r (q)-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множество U (V), т.е.

$$\begin{gathered} u(t)\in U\subset R^r,\qquad t\in T=\{t=\ t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\},\\ v(x)\in V\subset R^q,\qquad x\in X=\{\,x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1\}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Пару $\big(u(t),v(x)\big)$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u)=\varphi_2\big(y(x_1)\big)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big) \tag{2.5}$$

при ограничениях (2.1) - (2.4).

3. Основные результаты. Пусть $\big(u(t), v(x)\big)$ – фиксированный допустимый процесс, а $\big(z(t,x), y(x)\big)$ – соответствующее ему решение системы (2.1) - (2.3).

Варьированное управление определим следующим образом

$$u(t;\ \varepsilon) = u(t) + \varepsilon\,\delta u(t)\,, \quad t \in T,$$
$$v(x;\ \varepsilon) = v(x) + \varepsilon\,\delta v(x)\,, \quad x \in X. \tag{3.1}$$

Здесь $\delta u(t) \in R^r,\ t \in T,\ \delta v(x) \in R^q,\ x \in X$ – произвольные ограниченные вектор-функции, (допустимые вариации управляющих функций), а ε – произвольное достаточно малое по абсолютной величине число.

Введем функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,z,u,\psi) = \psi' f(t,x,z,u),$$
$$M(x,y,v,p) = p' g(x,y,v).$$

Здесь $\big(\psi(t,x), p(x)\big)$ – вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением сопряженной системы

$$\psi(t-1,x) = \frac{\partial H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial z}\,, \tag{3.2}$$

$$\psi(t_1-1,x) = -\frac{\partial \varphi_2\big(x, z(t_1,x)\big)}{\partial z}\,, \tag{3.3}$$

$$p(x-1) = -\frac{\partial M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial y} + \psi(t_0-1,x)\,, \tag{3.4}$$

$$p(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1\big(\,y(x_1)\big)}{\partial y}\,. \tag{3.5}$$

Тогда специальное приращение функционала качества (2.5), соответствующее допустимым управлениям $\big(u(t;\ \varepsilon), v(x;\ \varepsilon)\big)$ и $\big(u(t), v(x)\big)$, может быть представлено в виде

$$S\big(u(t;\ \varepsilon), v(x;\ \varepsilon)\big) - S\big(u(t), v(x)\big) =$$
$$= \varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u'\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta u(t) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\,\delta v(x)\right] +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{\delta y'(x_1)\ \frac{\partial^2\varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t,x)\ \frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x) + 2\delta u'(t)\,\times$$
$$\times\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u\,\partial z}\delta z(t,x) + \delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t)\Bigg] -$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta y'(x)\ \frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial z^2}\delta y(x) + 2\delta v'(x)\,\times \tag{3.6}$$
$$\times\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v\,\partial y}\delta y(x) + \delta v'(x)\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v^2}\delta v(x)\Bigg]\Bigg\} + o(\varepsilon^2)\,.$$

Здесь $\big(\delta z(t,x), \delta y(x)\big)$ − вариация траектории $\big(z(t,x), y(x)\big)$, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\delta z(t+1,x) = f_z\big(t,x,z(t,x),u(t)\big)\delta z(t,x) + f_u\big(t,x,z(t,x),u(t)\big)\delta u(t)\,,$$

$$t \in T, \qquad x \in X \cup x_1, \tag{3.7}$$

$$\delta z(t_0,x) = \delta y(x)\,, \qquad x \in X \cup x_1, \tag{3.8}$$

$$\delta y(x+1) = g_y\big(x,y(x),v(x)\big)\delta y(x) + g_v\big(x,y(x),v(x)\big)\delta v(x)\,, \;\; x \in X,$$

$$\delta y(x_0) = 0. \tag{3.9}$$

Из разложения (3.6) следует, что первая и вторая, в классическом смысле, вариации функционала (2.5) имеют соответственно вид:

$$\delta^1 S(u,v;\, \delta u, \delta v) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta u(t) -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\,\delta v(x), \tag{3.10}$$

$$\delta^2 S(u,v;\, \delta u, \delta v) = \delta y'(x_1)\,\frac{\partial^2 \varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(x_1) +$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t,x)\,\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x) + 2\delta u'(t)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u\,\partial z}\delta z(t,x) + \delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t)\Bigg] -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta y'(x)\,\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial z^2}\delta y(x) + 2\delta v'(x)\times \tag{3.11}$$

$$\times\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v\,\partial y}\delta y(x) + \delta v'(x)\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v^2}\delta v(x)\Bigg].$$

Из классической теории необходимых условий оптимальности, (см. напр. [4, с. 52-58]) с учетом (3.10), (3.11) следует, что вдоль оптимального управления $\big(u(t),v(x)\big)$, для всех $\big(\delta u(t),\delta v(x)\big)$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta u(t) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta v(x) = 0, \tag{3.12}$$

$$\delta y'(x_1)\,\frac{\partial^2 \varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t,x)\,\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t,x) + 2\delta u'(t)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u\,\partial z}\delta z(t,x) + \delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)}{\partial u^2}\delta u(t)\Bigg] -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\delta y'(x)\ \frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial z^2}\delta y(x)+2\delta v'(x)\times\right. \tag{3.13}$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v\,\partial y}\delta y(x)+\delta v'(x)\frac{\partial^2 M\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)}{\partial v^2}\delta v(x)\right]\geq 0\,.$$

Из соотношения (3.12), в силу произвольности $\delta u(t)\in R^r,\ t\in T,\ \delta v(x)\in R^q,\ x\in X$ приходим к следующему заключению

Теорема 3.1. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $\big(u(t),v(x)\big)$ в задаче (2.1) - (2.5) необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u\big(\theta,x,z(\theta,x),u(\theta),\psi(\theta,x)\big)=0, \tag{3.14}$$

$$M_v\big(\xi,y(\xi),v(\xi),p(\xi)\big)=0 \tag{3.15}$$

выполнялись для всех $\theta\in T$, $\xi\in X$ соответственно.

Соотношения (3.14), (3.15) представляют собой аналог уравнения Эйлера и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $\big(u(t),v(x)\big)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера (3.14), (3.15), назовем классической экстремалью.

Ясно, что число классических экстремалей может быть достаточно большим. Поэтому надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности второго порядка.

Решение задачи (3.7) - (3.8) допускает представление (см. напр. [5, с. 50-51; 6, с. 13-16])

$$\delta z(t,x)=F(t,x,t_0-1)\ \delta z(t_0,x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,x,\tau)f_u\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big)\delta u(\tau). \tag{3.16}$$

Здесь $F(t,x,\tau)$ $(n\times n)$ - матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F(t,x,\tau-1)=F(t,\tau,x)f_z\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big),$$
$$F(t,x,t-1)=E,$$

(E – единичная матрица).

А решение задачи (3.9) допускает представление

$$\delta y(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\delta v(s), \tag{3.17}$$

где $\Phi(x,s)-(n\times n)$ - матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)\ g_y\big(s,y(s),v(s)\big),$$
$$\Phi(x,x-1)=E.$$

Используя представление (3.17) формула (3.16) записывается в виде

$$\delta z(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}F(t,x,t_0-1)\Phi(x,s)g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\delta v(s)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,x,\tau)f_u\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big)\delta u(\tau). \tag{3.18}$$

В силу произвольности $\delta u(t)$ и $\delta v(x)$ предположим $\delta u(t)=0,\ t\in T,\ \delta v(x)\neq 0,\ x\in X$. Тогда формула (3.18) примет вид

$$\delta z(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}F(t,x,t_0-1)\Phi(x,s)g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\delta v(s). \tag{3.19}$$

При этом из неравенства (3.13) получим, что вдоль оптимального процесса $\big(u(t),v(x)\big)$

$$\delta y'(x_1)\,\frac{\partial^2\varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)\,H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta z(t,x)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[\delta y'(x)\,M_{yy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta y(x)+2\delta v'(x)\times \tag{3.20}$$
$$\times M_{vy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta y(x)+\delta v'(x)M_{vv}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta v(x)\big]\geq 0\,.$$

При помощи представлений (3.17), (3.19) доказывается, что

$$\delta y'(x_1)\,\frac{\partial^2\varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\delta y(x_1)= \tag{3.21}$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{x_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)\,g_v'\big(\tau,y(\tau),v(\tau)\big)\Phi'(x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2}\Phi(x_1,s)g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\delta v(s),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(x)\,M_{vy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta y(x)= \tag{3.22}$$
$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(x)\,M_{vy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\,\Phi(x,s)\,g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\,\delta v(s)\right],$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(x)\,M_{yy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\delta y(x)=\sum_{\tau=t_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)\,g_v'\big(\tau,y(\tau),v(\tau)\big)\times \tag{3.23}$$
$$\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)\,M_{yy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\,\Phi(x,s)\right\}g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\,\delta v(s)\,,$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau)\,g_v'\big(\tau,y(\tau),v(\tau)\big)\times \tag{3.24}$$
$$\times\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)F'(t_1,x,t_0-1)\,\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}F(t_1,x,t_0-1)\,\Phi(x,s)\right\}\times$$
$$\times\,g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\,\delta v(s)\,,$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)\,H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta z(t,x)=$$

$$= \sum_{\tau=t_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta v'(\tau)\, g_v'\big(\tau, y(\tau), v(\tau)\big) \times \tag{3.25}$$

$$\times \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x,\tau) F'(t,x,t_0-1)\, H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big) \times \right.$$

$$\left. \times F(t,x,t_0-1)\, \Phi(x,s) \right\} g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\, \delta v(s)\,.$$

Введем обозначение

$$K(\tau,s) = -\Phi'(x_1,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_1\big(y(x_1)\big)}{\partial y^2} \Phi(x_1,s) -$$

$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Phi'(x,\tau) F'(t_1,x,t_0-1)\, \frac{\partial^2 \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2} F(t_1,x,t_0-1)\, \Phi(x,s) +$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x,\tau) F'(t,x,t_0-1)\, H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big) F(t,x,t_0-1) \Phi(x,s) +$$

$$+ \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x,\tau)\, M_{yy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\, \Phi(x,s)\,. \tag{3.26}$$

Тогда с учетом тождеств (3.21) - (3.26) неравенство (3.20) примет вид

$$\sum_{\tau=t_0}^{x_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta v'(\tau)\, g_v'\big(\tau,y(\tau),v(\tau)\big) \mathrm{K}(\tau,s) g_v\big(s,y(s),v(s)\big) \delta v(s) +$$

$$+2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta v'(x)\, M_{vy}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big)\, \Phi(x,s)\, g_v\big(s,y(s),v(s)\big)\, \delta v(s) \right] +$$

$$+ \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta v'(x)\, M_{vv}\big(x,y(x),v(x),p(x)\big) \delta v(x) \le 0\,. \tag{3.27}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t) \neq 0,\ t \in T$, а $\delta v(x) \equiv 0,\ x \in X$.
Тогда из представлений (3.17), (3.18) получаем, что

$$\delta y(x) = 0, \quad x \in X \cup x_1 \tag{3.28}$$

$$\delta z(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t,x,\tau) f_u\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big) \delta u(\tau). \tag{3.29}$$

При этом неравенство (3.13) с учетом того, что $\delta v(x) = 0,\ x \in X$ примет вид

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1,x) \frac{\partial^2 \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2} \delta z(t_1,x) -$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \big[\delta z'(t,x)\, H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big) \delta z(t,x) + 2\delta u'(t) \times \tag{3.30}$$

$$\times H_{uz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta z(t,x)+\delta u'(t)H_{uu}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta u(t)\big]\geq 0\,.$$

Используя представление (3.29) займемся преобразованием неравенства (3.30).

Имеем (по аналогии с (3.21) - (3.25))

$$\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)=-\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta u'(\tau)f_u'\big(\tau,x_1,z(\tau,x),u(\tau)\big)\times$$

$$\times F'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}F(t_1,x,s)f_u\big(s,x,z(s,x),u(s)\big)\delta u(s)\,,\qquad(3.31)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)\,H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\delta u'(\tau)f_u'\big(\tau,x_1,z(\tau,x),u(\tau)\big)\,F'(t,x,\tau)\right)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\times$$

$$\times\left(\sum_{s=t_0}^{t-1}F(t,x,s)f_u\big(s,x,z(s,x),u(s)\big)\delta u(s)\right)=\qquad(3.32)$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left\{\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}\delta u'(\tau)\,f_u'\big(\tau,x_1,z(\tau,x),u(\tau)\big)\,F'(t,x,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)F(t,x,s)f_u\big(s,x,z(s,x),u(s)\big)\delta u(s)\right\}=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\tau)\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}f_u'\big(\tau,x_1,z(\tau,x),u(\tau)\big)\,F'(t,x,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)F(t,x,s)f_u\big(s,x,z(s,x),u(s)\big)\delta u(s)\right\},$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta u'(t)\,H_{uz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta z(t,x)=\qquad(3.33)$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\delta u'(t)\,H_{uz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)F(t,x,\tau)f_u\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big)\delta u(\tau)\right].$$

Предположим

$$M(\tau,s,x)=-F'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}F(t_1,x,s)\times$$

$$\times\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}F'(t,x,\tau)\,H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\,F(t,x,s)\,.\qquad(3.34)$$

С учетом тождеств (3.31) – (3.33) и обозначения (3.34) неравенство (3.30) примет вид:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\tau)\,f_u'\big(\tau,x_1,z(\tau,x),u(\tau)\big)\;M(\tau,s,x)\;f_u\big(s,x,z(s,x),u(s)\big)\delta u(s)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\delta u'(t)H_{uz}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)F(t,x,\tau)f_u\big(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big)\delta u(\tau)\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta u'(t)\,H_{uu}\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi(t,x)\big)\delta u(t)\le 0\,. \qquad (3.35)$$

Сформулируем результат.

Теорема 3.2. Для оптимальности классической экстремали $(u(t),v(x))$ необходимо, чтобы неравенства (3.27), (3.35) выполнялись соответственно для всех $\delta v(x)\in R^q$, $x\in X$, $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$.

4. Выводы. Статья посвящена исследованию одной специфической дискретной задачи оптимального управления, представляющей собой дискретный аналог задачи А.И. Москаленко. Предполагая, что область управления - открытое множество, введены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Литература

1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журн. Вычисл. Мат. и мат. физики. 1969, № 1, с. 68-95.
2. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971, 21 с.
3. Мансимов К.Б., Гараева Э.А. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, № 1.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973, 256 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 248 с.
6. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку, Изд-во БГУ, 2013, 151 с.

UOT 517.977

E.A. Qarayeva, K.B. Mənsimov

Bir sinif diskret optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər

Bir spesifik diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: diskret optimal idarəetmə məsələsi, funksionalın variasiyası, Eyler tənliyinin analoqu, optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt

E.A. Garayeva, K.B. Mansimov

One and second order necessary optimality conditions for the one class of discrete optimal control problems

We investigate the problem of optimal control of discrete systems. Assuming the openness management, we derive necessary optimality conditions of the first and second order.

Keywords: discrete optimal control problem, variation of a functional analogue of the Euler equation, a necessary optimality condition of the second order

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Представлено 09.06.2014