Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXV, No.3, 2015
www.icp.az/2015/3-12.pdf

УДК 517.977

Г.Ш. РАМАЗАНОВА

ОБ ОДНОМ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ ТИПЕ НЕОБХОДИМОГО УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СИСТЕМАХ ГУРСА-ДАРБУ

Рассматривается одна задача оптимального управления системами Гурса-Дарбу с негладкой правой частью. Получено необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям. Отдельно рассмотрен случай квазидифференцируемого функционала.

Ключевые слова: система Гурса-Дарбу, необходимое условие оптимальности, условие Липшица, производная по направлению

1. Введение. Задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу, начиная с работ [1, 2] интенсивно изучаются. Для таких задач управления установлены различные необходимые, достаточные условия оптимальности, изучены теоремы существования оптимальных управлений и скользящие режимы и т.д. (см. напр. [3-10], где имеется наиболее полный обзор соответствующих работ).

В предлагаемой работе рассматривается одна задача оптимального управления системами Гурса-Дарбу при предположении, что правая часть уравнения по вектору состояния, ее частным производным и вектору управления имеет производные по любому направлению и удовлетворяет условию Липшица. В терминах производных по направлениям получено необходимое условие оптимальности первого порядка. Отдельно рассмотрен случай квазидифференцируемого функционала. Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности в негладких задачах оптимального управления обыкновенными динамическими системами изучены в работах [11-17] и др.

2. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс в области $D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ описывается системой нелинейных гиперболических уравнений

$$z_{tx}=f(t,x,z,z_t,z_x,u), \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x), \quad x\in X=[x_0,x_1],\\ z(t,x_0)=b(t), \quad t\in T=[t_0,t_1],\\ a(x_0)=b(t_0). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $f(t,x,z,z_t,z_x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, определенная и непрерывная в $\Omega=D\times R^n\times R^n\times R^n\times R^r$, причем каждая ее компонента удовлетворяет в Ω условию Липшица по (z,z_t,z_x,u), и имеет производные по любому направлению в пространстве $R^n\times R^n\times R^n\times R^r$, т.е. существует предел (см. напр. [11, с. 358])

$$\frac{\partial f_i(t,x,z,z_t,z_x,u)}{\partial[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}\left[f_i(t,x,z+\alpha\beta_1,z_t+\alpha\beta_2,z_x+\alpha\beta_3,u+\alpha\beta_4)-f(t,x,z,z_t,z_x,u)\right], \quad i=\overline{1,n}.$$

где $\beta_i\in R^n$, $i=\overline{1,3}$, $\beta_4\in R^r$; $a(x)$ и $b(t)$ – заданные n-мерные вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица, $u(t,x)$ – r-мерная измеримая и ограниченная управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества U, т.е.

$$u(t,x)\in U\subset R^r, \quad (t,x)\in D. \tag{2.3}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

В дальнейшем рассматриваются абсолютно непрерывные решения краевой задачи (2.1) - (2.4). Напомним, что (см. напр. [4-9]) вектор-функция $z(t,x)$ называется абсолютно непрерывным решением краевой задачи (2.1) - (2.2), соответствующим выбранному допустимому управлению $u(t,x) \in L_\infty(D,U)$, если она почти всюду в D удовлетворяет уравнению (2.1), и представима в виде

$$z(t,x) = a(x) + b(t) - a(x_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q(\tau,s)\,ds\,d\tau,$$

где $Q(t,x) \in L_\infty(D,R^n)$ – некоторая вектор-функция.

Соответствующие теоремы существования и единственности абсолютно непрерывного решения краевой задачи (2.1) - (2.2) имеются, например в [4, 8].

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u) = \Phi\big(z(t_1,x_1)\big) \tag{2.4}$$

при ограничениях (2.1) - (2.3).

Здесь $\Phi(z)$ заданная в R^n скалярная функция, удовлетворяющая условию Липщица и имеющая производные, по любому направлению.

Допустимое управление $u(t,x)$, доставляющее минимум функционалу (2.4) при ограничениях (2.1) - (2.3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t,x), z(t,x)\big)$ – оптимальным процессом.

3. Необходимые условия минимума. Установим необходимые условия минимума, для задачи (2.1) - (2.4).

Положим

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\,\big(v(t,x) - u(t,x)\big) = \varepsilon\, q(t,x)\,, \tag{3.1}$$

где $\mathrm{q}(t,x) = \big(v(t,x) - u(t,x)\big)$, $\varepsilon \in [0,1]$ - произвольное число, $u(t,x)$ – заданное допустимое управление, а $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in D$ произвольное допустимое управление.

В дальнейшем будут использованы обозначения следующего типа

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial z} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),u(t,x)\big)}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial z_t} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),u(t,x)\big)}{\partial z_t},$$
$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial z_x} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),u(t,x)\big)}{\partial z_x},$$
$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial u} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),u(t,x)\big)}{\partial u}.$$

Пусть $u(t,x;\,\varepsilon) = u(t,x) + \varepsilon\, q(t,x)$, $z(t,x;\,\varepsilon) = z(t,x) + \Delta z(t,x;\,\varepsilon)$, где $\Delta z(t,x;\,\varepsilon)$ специальное приращение состояния $z(t,x)$, отвечающее специальному приращению (3.1) управления $u(t,x)$.

Положим

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(t,x;\,\varepsilon) - z(t,x)}{\varepsilon}, \\ h_t(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z_t(t,x;\,\varepsilon) - z_t(t,x)}{\varepsilon}, \\ h_x(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z_x(t,x;\,\varepsilon) - z_x(t,x)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь

$$h(t,x) = \left(h^{(1)}(t,x), h^{(2)}(t,x), h^{(n)}(t,x)\right)',$$
$$h_t(t,x) = \left(h_t^{(1)}(t,x), h_t^{(2)}(t,x), h_t^{(n)}(t,x)\right)',$$
$$h_x(t,x) = \left(h_x^{(1)}(t,x), h_x^{(2)}(t,x), h_x^{(n)}(t,x)\right)',$$

где $h^{(i)}(t,x) -$ i-я координата вектора $h(t,x)$, а $(')$ штрих оператор транспонирования.

Из (2.1) - (2.2) ясно, что

$$z(t,x;\ \varepsilon) = a(x) + b(t) - a(x_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f\big(\tau, s, z(\tau,s;\ \varepsilon), z_t(\tau,s;\ \varepsilon), z_x(\tau,s;\ \varepsilon), u(\tau,s;\ \varepsilon)\big)\, ds\, d\tau\ . \tag{3.3}$$

Из (3.3), в силу условий, наложенных на правую часть системы (2.1), получаем, что $h(t,x)$, определяемая формулой (3.2), является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} h_{tx}(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial[h(t,x), h_t(t,x), h_x(t,x)]}\ , \\ h(t_0,x) = 0\ , \quad x \in [x_0,x_1]\ , \\ h(t,x_0) = 0\ , \quad t \in [t_0,t_1]\ . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь и в дальнейшем использованы обозначения типа

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial[h(t,x), h_t(t,x), h_x(t,x)]} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)}{\partial[h(t,x),h_t(t,x),h_x(t,x)]} \\ \dfrac{\partial f_2\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)}{\partial[h(t,x),h_t(t,x),h_x(t,x)]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big)}{\partial[h(t,x),h_t(t,x),h_x(t,x)]} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{cases} z(t,x;\ \varepsilon) = z(t,x) + \varepsilon\, h(t,x) + o_1(\varepsilon; t,x)\ , \\ z_t(t,x;\ \varepsilon) = z(t,x) + \varepsilon\, h_t(t,x) + o_2(\varepsilon; t,x)\ , \\ z_x(t,x;\ \varepsilon) = z(t,x) + \varepsilon\, h_x(t,x) + o_3(\varepsilon; t,x)\ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Так как функция $\Phi(z)$ дифференцируема по направлениям и удовлетворяет условию Липшица, то используя (3.5) имеем

$$S\big(u(t,x;\ \varepsilon)\big) - S\big(u(t,x)\big) = \Phi\big(z(t_1,x_1) + \varepsilon\, h(t_1,x_1) + o(\varepsilon; t_1,x_1)\big) - \Phi\big(z(t_1,x_1)\big) =$$
$$= \varepsilon\, \frac{\partial\Phi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial h(t_1,x_1)} + o(\varepsilon)\ .$$

Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 3.1. Для того чтобы допустимое управление $u(t,x)$ было оптимальным управлением необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial\Phi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial h(t_1,x_1)} \geq 0 \tag{3.6}$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $h(t_1,x_1)$ состояния $z(t_1,x_1)$ системы (2.1) - (2.2).

Неравенство (3.6) является довольно общим, и учитывает особенности (в связи с негладкостью правой части системы (2.2) и функционала (2.1)) задачи (2.1) - (2.3). Для того чтобы из нее получить более конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности, надо конечно использовать специфические свойства функций

$f(t,x,z,z_t,z_x,u)$ и $\Phi(z)$.

Предположим, что $f(t,x,z,z_t,z_x,u)$ – гладкая функция, то есть имеет непрерывные производные по (z,z_t,z_x,u). При сделанных предположениях краевая задача (3.4) имеет вид

$$h_{tx}(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial z}\, h(t,x) + \frac{\partial f(t,x)}{\partial z_t} h_t(t,x) + \frac{\partial f(t,x)}{\partial z_x} h_x(t,x) + \qquad (3.7)$$

$$+\frac{\partial f(t,x)}{\partial u}\big(v(t,x)-u(t,x)\big),$$

$$h(t_0,x) = 0\,, \quad x \in [x_0,x_1]\,, \qquad (3.8)$$
$$h(t,x_0) = 0\,, \quad t \in [t_0,t_1]\,.$$

Пусть далее, функция $\Phi(z)$ квазидифференцируема в точке $z(t_1,x_1)$. Тогда по определению квазидифференцируемой функции (см. напр. [11, с. 128-152; 12, с. 255-263]) неравенство (3.6) имеет вид

$$\frac{\partial \Phi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial h(t_1,x_1)} = \max_{A\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))} A'\,h(t_1,x_1) + \min_{B\in\overline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))} B'\,h(t_1,x_1) \ge 0\,. \qquad (3.9)$$

Здесь $\left[\underline{\partial}\Phi\big(z(t_1,x_1)\big),\ \overline{\partial}\Phi\big(z(t_1,x_1)\big)\right]$ – квазидифференциал функции $\Phi(z)$ в точке $z(t_1,x_1)$, где $\underline{\partial}\Phi\big(z(t_1,x_1)\big)$, $\overline{\partial}\Phi\big(z(t_1,x_1)\big)$ – выпуклые компактные множества (см. напр. [11, с. 130, 12, с. 176]).

Решение краевой задачи (3.7)-(3.8) допускает представление (см. напр. [9, с. 9-11])

$$h(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R(t,x;\ \tau,s)\ \frac{\partial f(\tau,s)}{\partial u}\ \big(v(\tau,s)-u(\tau,s)\big)\,ds\,d\tau\,,$$

где $R(t,x;\ \tau,s)$ $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением уравнения

$$R(t,x;\ \tau,s) = E + \int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} R(t,x;\ \alpha,\beta)\ \frac{\partial f(\tau,s)}{\partial z}\ ds\,d\tau + \int_{\tau}^{t} R(t,x;\ \alpha,s)\ \frac{\partial f(\alpha,s)}{\partial z_s}\ ds +$$

$$+\int_{s}^{x} R(t,x;\ \tau,\beta)\ \frac{\partial f(\tau,\beta)}{\partial z_\tau}\ d\tau\,,$$

(E - $(n\times n)$ единичная матрица).

Поэтому из неравенства (3.9) имеем

$$\frac{\partial \Phi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial h(t_1,x_1)} = \max_{A\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))} \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} A'R(t_1,x_1;\ \tau,s)\ \frac{\partial f(\tau,s)}{\partial u}\ \big(v(\tau,s)-u(\tau,s)\big)\,ds\,d\tau +$$

$$+\min_{B\in\overline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))} \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} B'R(t_1,x_1;\ \tau,s)\ \frac{\partial f(\tau,s)}{\partial u}\ \big(v(\tau,s)-u(\tau,s)\big)\,ds\,d\tau \ge 0\,. \qquad (3.10)$$

Положим

$$\Psi_A(\tau,s) = R'(t_1,x_1;\ \tau,s)\,\boldsymbol{A}\,,$$
$$\Psi_B(\tau,s) = R'(t_1,x_1;\ \tau,s)\boldsymbol{B}\,,$$
$$H\big(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),v,\Psi_A(t,x)\big) = \Psi'_A(t,x)\,f\big(t,x,z(t,x)\big)\,.$$

Тогда неравенство (3.9) записывается в виде

$$\max_{A\in\underline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} H_u(\tau,s,z,z_\tau,z_s,u,\Psi_A)\ \big(v(\tau,s)-u(\tau,s)\big)\,ds\,d\tau\right] +$$

$$+\min_{B\in\overline{\partial}\Phi(z(t_1,x_1))}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} H_u(\tau,s,z,z_\tau,z_s,\Psi_B)\,\big(v(\tau,s)-u(\tau,s)\big)\,ds\,d\tau\right]\geq 0\,, \qquad (3.11)$$

для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$.

Теорема 3.2. Пусть $f(t,x,z,z_t,z_x,u)$ непрерывно дифференцируемая, по (z,z_t,z_x,u) вектор-функция, а $\Phi(z)$ квазидифференцируемая скалярная функция. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (2.1) - (2.4) необходимо, чтобы неравенство (3.11) выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$.

4. Выводы. В работе исследуется одна негладкая задача оптимального управления, описываемая системой Гурса-Дарбу. Выведен ряд необходимых условий оптимальности, в терминах производных по направлениям. Отдельно рассмотрен случай квазидифференцируемого функционала.

Литература

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964, № 5, с. 613-623.
2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965, т. 29, № 6, с. 1205-1260.
3. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, т. 28, № 5, с. 12-16.
4. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972, № 5, с. 845-856.
5. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. Н. Наука. 1990, 151 с.
6. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск. Изд-во Иркутск. Ун-ва, 1989, 160 с.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. Наука, 1981, 400 с.
8. Сумин В.И. Функциональные Вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Нижний Новгород. 1992, 110 с.
9. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, Изд-во «ЭЛМ», 2010, 316 с.
10. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку. Изд-во «ЭЛМ», 2003, 96 с.
11. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. Наука, 1990, 432 с.
12. Демьянов В.Ф. и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л. Изд-во Ленингр. ун-та. 1982, с. 322.
13. Демьянов В.Ф., Никулина В.Н., Шаблинская И.Р. Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связями // Дифференц. уравнения. 1985, т. 21, № 8, с. 1324-1330.
14. Демьянов В.Ф. Точные штрафные функции и задачи вариационного исчисления // Автоматика и телемеханика. 2004, № 2, с. 136-147.
15. Мансимов К.Б., Язданхаг А.Г. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой задаче управления с переменной структурой // Автоматика и вычислительная техника (г. Рига). 2008, т. 42, № 5, с. 5-14.
16. Мансимов К.Б., Язданхаг А.Г. Об одной негладкой гибридной задаче управления // Изв. НАНА. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 2009, № 6, с. 59-61.
17. Mansimov K.B., Yazdankhah A.H. Necessary conditions of optimality in one problem of control with variable structure and functional restrictions // Reports National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2009, № 6, pp. 3-9.

UOT 517.977

Q.Ş. Ramazanova

Qursa-Darbu sistemlərində bir xəttiləşdirilmiş tip zəruri şərt haqqında

Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan bir hamar olmayan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: Qursa-Darbu sistemi, optimallıq üçün zəruri şərt, Lipşis şərti, istiqamət üzrə törəmə

G.Sh. Ramazanova

On a necessary optimality condition of linearized type in the Goursat-Darboux systems

We consider one nonsmooth optimal control problem described from Goursat-Darboux systems. Necessary optimality conditions are obtained.

Keywords: Goursat-Darboux system, necessary optimality conditions, Lipchitz condition, directional derivative

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Представлено 09.06.2014