

UOT 681.32

N.Y. MƏMMƏDOV, N.T. ABDULLAYEV, G.S. AĞAYEVA

## SPEKTRAL ANALİZ ALQORİTMİ VƏ ONUN DİSKRET İNTEQRALLAMA XƏTASININ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

*Məqalədə ölçmə siqnalları üçün təklif olunmuş spektral analiz alqoritmində baxılır. Bu alqoritmə diskret realizasiyası zamanı yaranan xətanın dəqiq yuxarı sərhəddi Bernulli çoxhədlilərindən istifadə edilməklə qiymətləndirilir. Alınmış ümumiləşmiş xətanın ifadəsi ölçmə siqnalının diferensial, spektral xassələrindən və buraxıla bilən xətanın qiymətindən asılı olaraq, diskretləşdirmə parametrlərini müəyyən etməyə imkan verir.*

**Açar sözlər:** spektral analiz, kompleks Furiye əmsalları, diskret inteqrallama xətası, xətanın dəqiq yuxarı sərhəddi, siqnalın diferensial və spektral xassələri

**1. Giriş.** Furiye inteqral çevirmələri siqnalların analizinin əsas metodlarından biridir. Bu, tamamilə müxtəlif sahələrdə (dalğaların yayılmasında, elektrik dövrlərinin analizində, optikada, elektromaqnit nəzəriyyəsində və s.) çevrilmiş ifadələrlə işləməyin sadəliyi ilə əlaqədardır. Bununla belə, bir çox hallarda bu metodun istifadə edilməsi üçün lazımı ədədi nəticələrin alınması xeyli maddi və zaman itkisi ilə müşayiət olunur. Bu isə, öz növbəsində, ölçmə siqnallarının rəqəm emalında spektral analiz alqoritmlərinin və vasitələrinin təkmilləşdirilməsinin əhəmiyyətli olduğunu göstərir. Beləliklə, analizatorların metroloji xarakteristikalarının yaxşılaşdırılması üçün ən səmərəli üsullardan birinin yeni alqoritmlərin işlənilməsi olduğu alınır. Təklif olunan alqoritm analizatorun iş prinsipinin sadələşməsinə, səmərəliliyinin artırılmasına imkan verir [1]. Eyni zamanda, işdə, alqoritmə realizasiyası zamanı yaranan xətanın dəqiq yuxarı sərhəddi qiymətləndirilir.

### 2. Məsələnin qoyuluşu.

Tutaq ki,  $T$  dövrlü, kəsilməz  $y=f(t)$  funksiyası

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega t} \quad (2.1)$$

şəklində Furiye sırasına ayırılır. Burada  $j=\sqrt{-1}$  xəyali vahid,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $C_n$  – isə kompleks Furiye əmsalları adlanır və

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \quad (2.2)$$

kimi təyin olunur [2, s.296-297]. (2.2) düsturu vasitəsilə  $C_n$  əmsallarının hesablanması  $[0, T]$  parçasında ortoqonal olan  $\{e^{-jn\omega t}\}$  funksiyalar sisteminin formalaşmasını, onun  $f(t)$  funksiyasına vurulmasını və  $[0, T]$  parçasında bu hasilin orta qiymətinin tapılmasını tələb edir. Digər tərəfdən, (1) bərabərliyində  $n \in \overline{-N, N}$  şərti ödənərsə,  $f(t)$  funksiyası məhdud spektrli funksiya olar və bu funksiya  $M$  sayda  $t_i = \frac{T}{M} \cdot i$  ( $i = \overline{1, M}$ ) diskret nöqtələr çoxluğunda təyin olunduqda,  $C_n$  əmsallarını diskret Furiye çevirməsi vasitəsilə tapa bilərik. Bu halda da  $C_n$  əmsallarını tapmaq üçün yenə də  $t_i$  diskret nöqtələr çoxluğunda ortoqonal olan  $\{e^{-jn\omega t_i}\}$   $n \in \overline{-N, N}$  funksiyalar çoxluğunun formalaşması, uyğun  $f(t_i)$  qiymətlərinə vurulması və bu hasilərin cəmlənməsi tələb olunur. Digər tərəfdən,  $C_n$  əmsallarının diskret Furiye çevirməsi vasitəsilə hesablanması üçün lazım olan  $f(t_i)$  qiymətlərinin sayı  $M$  Kotelnikov teoreminə əsasən  $M > 2N$  şərtindən seçilir və  $M^2 (M^2 > 4N^2)$  tərtibdən kompleks vurma və toplama əməllərinin yerinə yetirməsini tələb edir. Bu isə  $M$ -in böyük qiymətlərində böyük aparat və vaxt itkisinə səbəb olur.

**3. Həll üsulları.**  $C_n$  əmsallarının tapılması üçün yuxarıda göstərilən çətinlikləri müəyyən qədər aradan qaldırmağa imkan verən yeni spektral analiz alqoritmə təklif olunur və onun xətası qiymətləndirilir.

Təklif olunan spektral analiz alqoritminin mahiyyəti (2.2) düsturu vasitəsilə təyin olunan  $C_n$  kompleks Furye əmsalları əvəzinə

$$C_n \approx G_n = \frac{1}{2\pi j n \alpha_0} \int_0^T e^{jn\omega(\alpha \cdot f(t)-t)} dt, \quad (n \neq 0) \quad (3.1)$$

düsturundan tapılan uyğun  $G_n$  kəmiyyətlərinin götürülməsindən ibarətdir.  $C_n$  əmsalını (2.2) düsturu ilə hesablamaq əvəzinə, onun qiymətini (3.1) düsturu ilə hesablanmış  $G_n$  əmsalı ilə əvəz etdikdə  $|G_n - C_n|$  xətası alınır. Digər tərəfdən (3.1) düsturunda  $\alpha$  kəmiyyətinin sifira yaxınlaşması şərtində limitə keçsək,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n = C_n$  bərabərliyinin doğru olmasını göstərmək olar. Bu isə o deməkdir ki, əvvəlcədən verilmiş ixtiyari, kiçik, müsbət  $\varepsilon > 0$  ədədi üçün  $\alpha$  kəmiyyətini elə seçmək olar ki,  $|G_n - C_n| < \varepsilon$  bərabərsizliyinin doğru olması təmin olunsun. (3.1) düsturu ilə  $G_n$  əmsallarının hesablanmasının, (2.2) düsturu ilə  $C_n$  əmsallarının hesablanmasından üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, (3.1) düsturundan istifadə etdikdə  $f(t \cdot e^{-jn\omega t})$  hasilinin hesablanması zəruriyyətinə ehtiyac qalmır. Eyni zamanda (3.1) düsturu öz növbəsində diskret inteqrallama düsturu ilə əvəz olunur:

$$G_n \approx \bar{G}_n = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=1}^M e^{jn\omega[\alpha \cdot f(t_i)-t_i]} \quad (3.2)$$

Burada  $M$ - anı qiymətlərin sayı,  $t_i = i \cdot \Delta t$  zamana görə diskretləşdirmə anları,  $\Delta t = \frac{T}{M}$  -isə diskretləşdirmə addımıdır.

(3.1)-ə əsasən  $G_n$  hesablamaq əvəzinə (3.2) düsturu əsasında  $\bar{G}_n$  kəmiyyətini hesabladıqda, diskret inteqrallama xətası adlanan  $|\bar{G}_n - G_n|$  mütləq xətası yaranır. Bu xətanın qiyməti  $f(t)$  funksiyasının diferensial və spektral xassələrilə yanaşı,  $f(t_i)$  -anı qiymətlərin sayı  $M$ -dən asılıdır. Ümumiyyətlə,  $M$  artdıqca diskret inteqrallama xətası azalır. Xətanı  $\delta(f, M) = \bar{G}_n - G_n$  kimi işarə edərək, onu

$$\delta(f, M) = \bar{G}_n - G_n = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=1}^M e^{jn\omega[\alpha \cdot f(t_i)-t_i]} - \frac{1}{Tjn\omega\alpha} \int_0^T e^{jn\omega[\alpha \cdot f(t)-t]} dt$$

kimi aşkar şəkildə yazaraq fərqi qiymətləndirək. Burada, sadəlik üçün

$$y(t) = \frac{1}{jn\omega\alpha} e^{jn\omega[\alpha \cdot f(t)-t]}$$

əvəzləməsini etsək, onda

$$\delta(f, M) = \bar{G}_n - G_n = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{jn\omega\alpha} \sum_{i=0}^{M-1} y(t_i) - \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (3.3)$$

alınar. (3.3) xətasını qiymətləndirmək üçün  $y(t)$  funksiyasının üzərinə müəyyən şərtlər qoyaq.

Tutaq ki,  $[0, T]$  parçasında verilmiş  $y(t)$  funksiyası:

1)  $[0, T]$  - parçasında özünün  $m$ -ci tərtib törəmələri lə birlikdə kəsilməzdir;

2)  $[0, T]$  - parçasının uc nöqtələrində  $y(t)$  funksiyasının və onun ilk  $m$  tərtibli törəmələrinin uyğun qiymətləri eynidir, yəni,  $k=0, 1, 2, \dots, m$  olduqda  $y^{(k)}(+0) = y^{(k)}(T-0)$  bərabərliyi doğrudur. Bu şərtləri ödəyən  $[0, T]$  parçasında verilmiş  $y(t)$  funksiyasına  $\tilde{C}^{(m)}[0, T]$  dövrülük sinfinə daxil olan funksiya deyilir [3, s.211].

Belə funksiyanı dövrü davam etdirdikdə  $C^{(m)}(-\infty, \infty)$  sinfinə daxil olan funksiya alırıq.

(3.3) funksionalını qiymətləndirmək üçün, tutaq ki,  $t(t) \in \tilde{C}^{(m-1)}[0, T]$  və onun  $m$ -ci tərtib törəməsi isə

$$|y^{(m)}(t)| \leq y_{\max}^{(m)} \quad (3.4)$$

şərtini ödəyən funksiyadır. Burada  $y_{\max}^{(m)}$  müəyyən sabit kəmiyyətdir.

Bu şərtlərdən

$$\int_0^T y^{(k)}(t)dt = 0, \quad k=\overline{1, m-1} \quad (3.5)$$

və

$$\sum_{i=0}^{M-1} y(t_i) = \sum_{i=0}^{M-1} y(t_{i+1}) \quad (3.6)$$

bərabərliklərinin doğruluğu alınır. (3.6) bərabərliyini (3.3)-də nəzərə alsaq

$$\delta(f, M) = \overline{G}_n - G_n = \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{M-1} [y(t_i) + y(t_{i+1})] - \frac{1}{T} \int_0^T y(t)dt \quad (3.7)$$

bərabərliyini, müəyyən çevirmələrdən sonra isə (3.7)-i

$$\delta(f, M) = \overline{G}_n - G_n = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{t-t_i}{\Delta t} - 0,5\right) \cdot y'(t)dt \quad (3.8)$$

şəklinə gətirmək olar. (3.8)-dəki inteqrala hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək (3.7) alınır. (3.8)-də iştirak edən  $\frac{t-t_i}{\Delta t} - 0,5$  funksiyası  $\frac{t-t_i}{\Delta t}$  ifadəsinə nəzərən birinci tərtib Bernulli çoxhədlisidir [4, s.319], yəni

$$B_1\left(\frac{t-t_i}{\Delta t}\right) = \frac{t-t_i}{\Delta t} - 0,5 \quad (3.9)$$

olduğunu nəzərə alıb, orada  $t - t_i = z$  əvəzləməsini edib, yenidən  $z$ -in əvəzinə  $t$  yazsaq

$$\delta(f, M) = \overline{G}_n - G_n = \frac{1}{M} \int_0^{\Delta t} B_1\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \sum_{i=0}^{M-1} y'(t + t_i)dt \quad (3.10)$$

alırıq. Bilavasitə yoxlama göstərir ki,  $\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} y'(t + t_i)dt$  funksiyası  $\Delta t$  dövrlü dövrü funksiyadır və  $\delta(f, M)$  xətasının ekstremal qiyməti axtarıldığına görə (3.10) bərabərliyində  $\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} y'(t + t_i)$  əvəzinə  $y'(t)$  yazmaq olar.

$$\delta(f, M) = \overline{G}_n - G_n = \int_0^{\Delta t} y'(t) B_1\left(\frac{t}{\Delta t}\right) dt \quad (3.11)$$

şəklinə gətirilir.  $y(t)$  funksiyası üzərinə qoyulmuş şərtləri və Bernulli çoxhədlilərinin xassələrini nəzərə alaraq, (3.11) inteqralında hissə-hissə inteqrallama düsturunu ardıcıl olaraq bir neçə dəfə yerinə yetirsək

$$\delta(f, M) = \overline{G}_n - G_n = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \Delta t^{m-1} \int_0^{\Delta t} y^m(t) B_m\left(\frac{t}{\Delta t}\right) dt \quad (3.12)$$

bərabərliyini alırıq. Burada  $B_m\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$  funksiyası  $\frac{t}{\Delta t}$ -yə nəzərən  $m$ -tərtibli Bernulli çoxhədlisidir. Bernulli çoxhədlisinin xassəsi onun tərtibi  $m$ -in tək və yaxud cüt olmasından asılı olduğuna görə  $m$ -in tək və cüt olduğu hallara ayrıca baxaq.

$m$  tək olduqda  $B_m\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$  çoxhədlisi [5, s.607-608] aşağıdakı xassələrə malikdir:

- $(0; \Delta t)$  intervalınının  $t=0,5 \cdot \Delta t$  nöqtəsində yeganə kökü var;
- $(0; 0,5 \cdot \Delta t)$  və  $(0,5 \cdot \Delta t; \Delta t)$  intervallarında sabit işarəlidir;
- göstərilən bu intervalların birindən digərinə keçdikdə öz işarəsini əksinə dəyişir.

Bu xassələrdən istifadə edərək belə nəticəyə gəlmək olar ki,  $y(t)$  funksiyasının üzərinə qoyulmuş şərtlər ödənərsə, onda  $y_{max}^{(m)} = \max(y^{(m)}(t))$  olduğunu qəbul etsək,

$$y^{(m)}(t) = y_{max}^{(m)} \operatorname{sign}[B_m\left(\frac{t}{\Delta t}\right)], \quad (3.13)$$

funksiyası (3.12) ifadəsilə təyin olunan  $\overline{G}_n - G_n$  xətasının ekstramalı olar.

Onda

$$|\delta(f, M)| = |\overline{G}_n - G_n| \leq \frac{1}{m!} \Delta t^{m-1} \cdot y_{\max}^{(m)} \int_0^{\Delta t} \left| B_m \left( \frac{t}{\Delta t} \right) \right| dt \quad (3.14)$$

alarıq. Sağ tərəfdəki inteqralı hesablasaq

$$\int_0^{\Delta t} \left| B_m \left( \frac{t}{\Delta t} \right) \right| dt = \frac{2 \cdot \Delta t}{m+1} (2 - 2^{-m}) \cdot |B_{m+1}| \quad (3.15)$$

olar. Burada  $B_{m+1}$  ədədi  $m+1$  tərtibli Bernulli ədədidir. (3.15) bərabərliyini (3.14)-də nəzərə alsaq,

$$|\delta(f, M)| = |\overline{G}_n - G_n| \leq \frac{|B_{m+1}|}{(m+1)!} \cdot (4 - 2^{1-m}) (\Delta t)^m \cdot y_{\max}^{(m)}$$

olar. Bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadə xətanın  $m$ -in tək qiymətində dəqiq yuxarı sərhəddir, onu

$$|\delta_{\max}(f, M)| = \frac{|B_{m+1}|}{(m+1)!} \cdot (4 - 2^{1-m}) (\Delta t)^m \cdot y_{\max}^{(m)} \quad (3.16)$$

kimi işarə edək  $m$  cüt olduqda Bernulli çoxhədlilərinin xassələrini və (3.5) şərtini nəzərə alsaq (3.12)-dən

$$\delta(f, M) = |\overline{G}_n - G_n| = \frac{1}{m!} \Delta t^{m-1} \int_0^{\Delta t} y^{(m)}(t) \left| B_m \left( \frac{t}{\Delta t} \right) - B_m \left( \frac{1}{4} \right) \right| dt \quad (3.17)$$

yazmaq olar.  $B_m \left( \frac{t}{\Delta t} \right) - B_m \left( \frac{1}{4} \right)$  funksiyası  $t=0,5 \cdot \Delta t$  düz xəttinə nəzərən simmetrik olaraq,  $t=0,25 \cdot \Delta t$  və  $t=0,75 \cdot \Delta t$  nöqtələrində sıfır çevrilir. Bunları nəzərə alsaq, (3.17) funksionalı üçün

$$y^{(m)}(t) = -y_{\max}^{(m)} \operatorname{sign} \left[ B_m \left( \frac{t}{\Delta t} \right) - B_m \left( \frac{1}{4} \right) \right] \quad (3.18)$$

ekstremal olar. (3.18)-i (3.17)-də nəzərə alsaq

$$|\delta(f, M)| = |\overline{G}_n - G_n| \leq \frac{1}{(m+1)!} \Delta t^m \cdot y_{\max}^{(m)} \cdot \left| B_m \left( \frac{1}{4} \right) \right| \quad (3.19)$$

olar.  $B_m \left( \frac{1}{4} \right)$  ifadəsini  $E_m$  Eyley ədədilə ifadə etsək,  $B_m \left( \frac{1}{4} \right) = -\frac{m+1}{4^{m+1}} E_m$  olar.

Bunu (3.19)-da nəzərə alsaq, onda

$$|\delta(f, M)| = |\overline{G}_n - G_n| \leq \frac{|E_m|}{4^m \cdot m!} \cdot (\Delta t)^m \cdot y_{\max}^{(m)} \quad (3.20)$$

alarıq. (3.20) bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadə xətanın  $m$ -in cüt qiymətlərində dəqiq yuxarı sərhəddir.

Deməli,  $m$ -in cüt qiymətlərində (3.20)-ə uyğun xətanın dəqiq yuxarı sərhəddi

$$|\delta_{\max}(f, M)| = \frac{|E_m|}{4^m \cdot m!} \cdot (\Delta t)^m \cdot y_{\max}^{(m)} \quad (3.21)$$

kimi olar. (3.16) və (3.21) münasibətlərinə uyğun xətanın dəqiq yuxarı sərhəddinin ümumi düsturunu yazmaq üçün  $m$  tək olarsa, (3.16)-dan  $L_m = \frac{|B_{m+1}|}{(m+1)!} \cdot (4 - 2^{1-m})$  və  $m$  cüt olduqda

(3.21)-dən isə  $L_m = \frac{|E_m|}{4^m \cdot m!}$  kimi təyin olunan bu iki halı birləşdirərək

$$L_m = \begin{cases} \frac{|B_{m+1}|}{(m+1)!} \cdot (4 - 2^{1-m}), & m = 2p - 1 \\ \frac{|E_m|}{4^m \cdot m!}, & m = 2p \end{cases} \quad (3.22)$$

işarələməsini qəbul edək. Qeyd etmək lazımdır ki, (3.22)-lə təyin olunan  $L_m$  əmsalları sabit ədədlər olub diskretləşdirmə addımı  $\Delta t$ -dən asılı olmayıb, yalnız  $y(t)$  funksiyasının hamarlıq dərəcəsini gösrdən törəmənin tərtibi  $m$ -dən asılıdır.

(3.16) və (3.21) düsturlarını birləşdirərək diskret inteqrallama xətasını qiymətləndirmək üçün

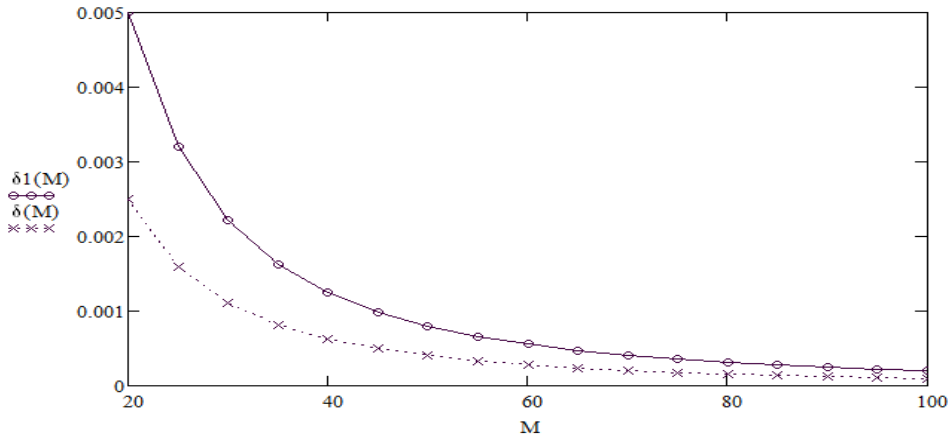
$$\delta_{max}(f, M) = L_m(\Delta t)^m \cdot y_{max}^{(m)} \quad (3.23)$$

düsturunu alırıq.  $\Delta t = \frac{T}{M}$  olduğunu nəzərə alaraq,  $D_m = L_m \cdot T^m \cdot y_{max}^{(m)}$  işarələməsini qəbul etsək (3.23) bərabərliyini

$$\delta_{max}(f, M) = \frac{D_m}{M^m} \quad (3.24)$$

şəklində yazmaq olar. Burada  $D_m$  kəmiyyətinə tədqiq olunan  $y(t)$  funksiyalar sinfini xarakterizə edən ümumiləşmiş parametri kimi baxmaq olar.

Şək.1.-də  $\delta(f, M)$  xətasının  $D=1$ ,  $D=2$  və  $m=2$  olduqda  $M$ -dən asılılığı qrafiki MATHCAD proqramı mühitindən istifadə edilərək təqdim olunmuşdur.



Şək.1.  $\delta(f, M)$  xətasının  $D=1$ ,  $D=2$  və  $m=2$  olduqda  $M$ -dən asılılığı

Eyler və Bernulli [3, s.611-613] ədədlərinin qiymətlərini (3.23)-də nəzərə alsaq, törəmənin tərtibi  $m = \overline{1,5}$  qiymətləri üçün xətanın yuxarı sərhəddi üçün

$$\delta_{max}(f, M) = \begin{cases} \frac{\Delta t \cdot y'_{max}}{4}, & m = 1 \\ \frac{(\Delta t)^2 \cdot y''_{max}}{32}, & m = 2 \\ \frac{(\Delta t)^3 \cdot y'''_{max}}{192}, & m = 3 \\ \frac{(\Delta t)^4 \cdot y^{(4)}_{max}}{6144}, & m = 4 \\ \frac{(\Delta t)^5 \cdot y^{(5)}_{max}}{7680}, & m = 5 \end{cases}$$

ifadələrini ala bilərik. Burada  $y(t) = \frac{1}{jn\omega\alpha} e^{jn\omega[\alpha \cdot f(t) - t]}$  əvəzləməsinin qəbul olunduğunu nəzərə alsaq, onda  $y'_{max} = \frac{2}{\alpha} \max_{t \in [0; T]} |\alpha \cdot f'(t) - 1|$  olar və deməli, (3.23)-dən  $m=1$  halı üçün xətanın dəqiq yuxarı sərhəddi üçün

$$\delta_{max}(f, M) = \frac{\Delta t}{2\alpha} \cdot \max_{t \in [0; T]} |\alpha \cdot f'(t) - 1|$$

düsturunu alarıq.

$$m=2 \text{ halı üçün isə } y''_{max} = 2 \max_{t \in [0; T]} \sqrt{(\alpha \cdot f''(t))^2 + (\alpha \cdot f'(t) - 1)^2}$$

olduğuna görə (3.23)-ə uyğun xəta düsturu

$$\delta_{max}(f, M) = \frac{(\Delta t)^2}{16} \cdot \max_{t \in [0; T]} \sqrt{(\alpha \cdot f''(t))^2 + (\alpha \cdot f'(t) - 1)^2}$$

olar.

Beləliklə,  $\tilde{C}^{(m-1)}[0, T]$  funksiyalar sinfinə daxil olan və  $m$ -ci tərtib törəməsi (3.4) şərtini ödəyən  $y(t)$  funksiyalar çoxluğunda, (3.3) bərabərliylə təyin olunan  $\delta(f, M)$  funksionalının dəqiq yuxarı sərhəddi (3.23) ifadəsilə təyin olunur.

Alınmış (3.24) qiymətləndirməsinin aşağıdakı xüsusiyyətlərini qeyd edək:

– göstərilən çoxluğa daxil olan hər bir  $y(t)$  funksiyası üçün

$$|\delta(f, M)| \leq \delta_{max}(f, M) \quad (3.25)$$

bərabərsizliyi doğrudur;

–  $\delta_{max}(f, M)$  xətası,  $y(t)$  funksiyalar sinfini xarakterizə edən ümumiləşmiş  $D_m$  parametrini və diskret addımların sayı  $M$  qarşılıqlı əlaqələndirir;

–  $\delta_{max}(f, M)$  xətasının, diskret addımların sayı  $M$ -dən və  $y(t)$  funksiyasının hamarlıq dərəcəsinə gösdərən törəmənin tərtibi  $m$ -dən asılı olaraq azalma tərtibini aşkar şəkildə göstərir;

– qiymətləndirmə  $y(t)$  funksiyasının spektri qeyri məhdud olduğu haldada doğrudur;

– əgər baxılan funksiyalar sinfinə daxil olan  $y(t)$  funksiyası  $m-1$  dərəcəli çoxhədli olarsa, onda  $\delta_{max}(f, M)=0$  olar;

(3.24) düsturundan istifadə edərək aşağıdakı məsələləri həll edə bilərik:

–  $D_m$  və  $\delta_{max}(f, M)$  verildikdə (3.24) bərabərsizliyinin doğruluğunu təmin edən diskret addımların sayı  $M$ -in tapılması;

–  $\delta_{max}(f, M)$  və  $M$  verildikdə  $|\delta(f, M)| \leq \delta_{max}(f, M)$  şərtini ödəyən  $y(t)$  funksiyalar sinfini xarakterizə edən ümumiləşmiş  $D_m$  parametrinin tapılması.

**4. Nəticə.** Diskret inteqrallama xətası üçün alınmış dəqiq yuxarı sərhəddin ümumiləşmiş ifadəsi tədqiq olunan siqnalın spektral və diferensial parametrlərilə yanaşı, diskretləşdirmə parametrlərinin də funksiyası olduğuna görə, buraxıla bilən xəta məlum olduqda, diskretləşdirmə parametrlərini (diskret addımlarının sayını, diskretləşmə addımını və tezliyini) siqnalın diferensial və spektral parametrlərindən asılı müəyyən etməyə imkan verir.

#### Ədəbiyyat

1. Н.Я. Мамедов, Н.Т. Абдуллаев, Г.С. Агаева. Алгоритм спектрального анализа измерительных сигналов. Изв. ВУЗов “Приборостроение”, 2014, Т.57 №7, стр.37-41.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд.- СПб.: Питер, 2006.-751 стр.: ил.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.-М.: Наука, 1966.-664 стр.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей.-М.: Техничко-теоретическая литература, 1952. -480 стр.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И.Стиган.-М.: Наука, 1979.-820 стр.

УДК 681.32

Н.Я. Мамедов, Н.Т. Абдуллаев, Г.С. Агаева

**Алгоритм спектрального анализа и оценка погрешности дискретного интегрирования**

*Рассматривается предложенный алгоритм спектрального анализа измерительного сигнала. С использованием многочленов Бернулли оценивается точная верхняя граница погрешности при реализации данного алгоритма. Полученное обобщенное выражение погрешности в зависимости от дифференциальных и спектральных свойств сигнала, а также от значений допустимой погрешности позволяет определить параметры дискретизации сигнала.*

**Ключевые слова:** спектральный анализ, комплексные коэффициенты Фурье, погрешность дискретного интегрирования, точная верхняя граница погрешности, спектральные и дифференциальные свойства сигнала

N.Y. Mamedov, N.T. Abdullayev, G.S. Agayeva

**Algorithm of spectral analysis and error estimation of discrete integration**

*We consider the proposed algorithm for spectral analysis of the measurement signal. Using Bernoulli polynomials, the least upper bound of error in the implementation of this algorithm is evaluated. The generalized expression of the error depending on the differential and spectral properties of the signal, as well as the permissible error values allows for determining the sampling parameters of the signal.*

**Keywords:** spectral analysis, complex Fourier coefficients, discrete integration error, least upper bound of error, spectral and differential properties of signal

Azərbaycan Texniki Universiteti

Təqdim olunub 03.04.2014