Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXV, No.6, 2015
www.icp.az/2015/6-05.pdf

УДК 517.952

Ш.М. РАСУЛОВА

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается одна линейная задача оптимального управления с линейным функционалом качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в виде принципа максимума Л.С. Понтрягина. Выделен класс задач с нелинейным функционалом качества, когда принцип максимума Понтрягина является достаточным условием оптимальности.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, необходимое и достаточное условие оптимальности, выпуклый функционал, линейная задача оптимального управления

1. Введение. В работах [1, 2] получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и исследованы особые случаи в одной непрерывной задаче оптимального управления, занимающей некоторое промежуточное положение между задачами оптимального управления сосредоточенными и с распределенными параметрами [3, 4], а именно задача, рассмотренная в [3, 4] с одной стороны тесно связана с задачами управления системами с сосредоточенными параметрами, а с другой стороны эту задачу можно интерпретировать как задачу для уравнений с частными производными с управлением на границе (см. [1, с.68-70]).

В предлагаемой работе исследуется аналогичная задача в линейном случае с линейным критерием качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [5-7]. Выделен класс задач, для которых условие максимума Понтрягина является достаточным.

2. Постановка задачи. Допустим, что закон движения управляемого объекта описывается системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = A(t,x)\, z(t,x) + f\big(t,x,u(t,x)\big), \quad (t,x) \in D = T \times X = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1], \qquad (2.1)$$

с начальным условием

$$z(t_0,x) = y(x), \quad x \in X\,. \qquad (2.2)$$

Здесь $A(t,x)$ – заданная $(n \times n)$ непрерывная матричная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 заданы $(t_0 < t_1, x_0 < x_1)$, $f(t,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных, $u(t,x)$ $-r$-мерный кусочно-непрерывный (в смысле, например, [8, с.1158]) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.

$$u(t,x) \in U \subset R^r, \quad (t,x) \in D. \qquad (2.3)$$

$y(x) - n$-мерная начальная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$\dot{y}(x) = B(x)\, y(x) + g\big(x, v(x)\big), \quad x \in X, \qquad (2.4)$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad (2.5)$$

где $B(x)$ – заданная $(n \times n)$-мерная непрерывная матричная функция, y_0 – заданный постоянный вектор, $g(x,v)$ – заданная непрерывная по совокупности переменных n-мерная вектор-функция, $v(x) - q$-мерная кусочно-непрерывная вектор-функция (с конечным числом точек разрыва первого рода) со значениями из непустого и ограниченного множества $V \subset R^q$, т.е.

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X. \qquad (2.6)$$

Пару $\big(u(t,x),v(x)\big)$ с вышеприведенными условиями назовем допустимым управлением.

На решениях системы уравнений (2.1)-(2.2), (2.4)-(2.5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u,v)=\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1} c'_i(x)\, z(T_i,x)\, dx+\sum_{i=1}^{k} d'_i\, y(X_i). \tag{2.7}$$

Здесь $c_i(x)$, d_i, $i=\overline{1,k}$ – заданные соответственно непрерывные n-мерные вектор-функции и постоянные векторы, $T_i\in(t_0,t_1]$ $(t_0<T_1<\ldots<T_k\le t_1)$, $X_i\in(x_0,x_1]$ $(x_0<X_1<\ldots<X_k\le x_1)$, $i=\overline{1,k}$ – заданные точки.

Требуется минимизировать функционал (2.7) при ограничениях (2.1)-(2.6).

Допустимое управление $\big(u^o(t,x),v^o(x)\big)$, доставляющее минимум функционалу (2.7) при ограничениях (1)-(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u^o(t,x),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ – оптимальным процессом. Получим условия оптимальности в рассматриваемой задаче.

3. Формула для приращения критерия качества и условие оптимальности.

Построим формулу для приращения критерия качества соответствующие допустимым процессам $\big(\bar u(t,x)=u^o(t,x)+\Delta u(t,x),\bar v(x)=v^o(x)+\Delta v(x),\bar z(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x),$ $\bar y(x)=y^o(x)+\Delta y(x)\big)$ и $\big(u^o(t,x),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$.

Имеем

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar u,\bar v)-S(u^o,v^o)=\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1} c'_i(x)\,\Delta z(T_i,x)\,dx+\sum_{i=1}^{k} d'_i\,\Delta y(X_i), \tag{3.1}$$

где $\big(\Delta z(t,x),\Delta y(x)\big)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial t}=A(t,x)\,\Delta z(t,x)+\big[f\big(t,x,\bar u(t,x)\big)-f\big(t,x,u^o(t,x)\big)\big],$$
$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x),\quad x\in X, \tag{3.2}$$
$$\dot{\Delta y}(x)=B(x)\,y\Delta(x)+\big[g\big(x,\bar v(x)\big)-g\big(x,v^o(x)\big)\big],\quad x\in X,$$
$$\Delta y(x_0)=0. \tag{3.3}$$

Решения задач (3.2), (3.3) на основе формулы об интегральном представлении решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений (см. напр. [9, с.18; 10, с.193-194]) допускают следующие представления соответственно

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} F(t,\tau;x)\,\big[f\big(\tau,x,\bar u(\tau,x)\big)-f\big(\tau,x,u^o(\tau,x)\big)\big]\,d\tau+F(t,t_0;x)\,\Delta y(x), \tag{3.4}$$

$$\Delta y(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\,\big[g\big(s,\bar v(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\big]\,ds. \tag{3.5}$$

Здесь $F(t,\tau;x)$, $\Phi(x,s)$ – $(n\times n)$ матричные функции являющиеся решениями задач

$$F_t(t,\tau;x)=F(t,\tau;x)\,A(\tau,x), \tag{3.6}$$
$$F(t,t;x)=E,$$
$$\Phi_t(x,s)=-\Phi(x,s)\,B(s), \tag{3.7}$$
$$\Phi(x,x)=E,$$

(E – единичная матрица размерности $(n\times n)$).

Учитывая (3.5) из формулы представления (3.4) получим, что

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau;x)\left[f\big(\tau,x,\bar{u}(\tau,x)\big)-f\big(\tau,x,u^o(\tau,x)\big)\right]d\tau+$$
$$+\int_{x_0}^{x}F(t,t_0;x)\,\Phi(x,s)\left[g\big(s,\bar{v}(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\right]ds\,, \tag{3.8}$$

Из (3.8) и (3.5) следует, что

$$\Delta z(T_i,x)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(\tau)\,F(T_i,\tau;x)\left[f\big(\tau,x,\bar{u}(\tau,x)\big)-f\big(\tau,x,u^o(\tau,x)\big)\right]d\tau+$$
$$+\int_{x_0}^{x}F(T_i,t_0;x)\,\Phi(x,s)\left[g\big(s,\bar{v}(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\right]ds\,, \tag{3.9}$$

$$\Delta y(X_i)=\int_{x_0}^{x_1}\Phi(X_i,s)\,\beta_i(s)\left[g\big(s,\bar{v}(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\right]ds. \tag{3.10}$$

Здесь $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(x)$ характеристические функции отрезков $[t_0,T_i]$, $[x_0,X_i]$ соответственно.

Принимая во внимание представления (3.9), (3.10) из формулы приращения (3.1), будем иметь

$$\Delta S(u^o,v^o)=\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}c'_i(x)\,\alpha_i(\tau)\,F(T_i,\tau;x)\left[f\big(\tau,x,\bar{u}(\tau,x)\big)-f\big(\tau,x,u^o(\tau,x)\big)\right]d\tau\,dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x}c'_i(x)\,F(T_i,t_0;x)\,\Phi(x,s)\left[g\big(s,\bar{v}(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\right]dx\,ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x}d'_i\,\beta_i(s)\,\Phi(X_i,s)\left[g\big(s,\bar{v}(s)\big)-g\big(s,v^o(s)\big)\right]ds.$$

Отсюда на основе формулы Дирихле имеем

$$\Delta S(u^o,v^o)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}c'_i(x)\,\alpha_i(\tau)\,F(T_i,\tau;x)'\left[f\big(\tau,x,\bar{u}(\tau,x)\big)-f\big(\tau,x,u^o(\tau,x)\big)\right]d\tau\,dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{i=1}^{k}d'_i\,\beta_i(x)\,\Phi(X_i,x)+\int_{x}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}c'_i(s)\,F(T_i,t_0;s)\,\Phi(s,x)\,ds\right]\times$$
$$\times\left[g\big(x,\bar{v}(x)\big)-g\big(x,v^o(x)\big)\right]dx. \tag{3.11}$$

Введя обозначения

$$p^{o'}(t,x)=-\sum_{i=1}^{k}c'_i(x)\,\alpha_i(t)\,F(T_i,t;x), \tag{3.12}$$

$$q^{o'}(x)=-\sum_{i=1}^{k}\left[d_i\,\beta_i(x)\,\Phi(X_i,x)+\int_{x}^{x_1}c'_i(s)\,F(T_i,t_0;s)\,\Phi(s,x)\,ds\right], \tag{3.13}$$

$$H(t,x,u,p^o) = p^{o'} \cdot f(t,x,u),$$
$$M(x,v,q^o) = q^{o'} \cdot g(x,v),$$

формула приращения (3.11) записывается в виде

$$\Delta S(u^o,v^o) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[H\big(t,x,\bar{u}(t,x),p^o(t,x)\big) - H\big(t,x,u^o(t,x),p^o(t,x)\big)\right]dx\,dt -$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \left[M\big(x,\bar{v}(x),q^o(x)\big) - M\big(x,v^o(x),q^o(x)\big)\right]dx. \qquad (3.14)$$

Используя представление (3.14) аналогично [6, с.20-45; 11, с.12-24], доказывается

Теорема 3.1. Для оптимальности допустимого управления $\big(u^o(t,x),v^o(x)\big)$ в задаче (2.1)-(2.7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\max_{u\in U} H\big(\theta,\xi,u,p^o(\theta,\xi)\big) = H\big(\theta,\xi,u^o(\theta,\xi),p^o(\theta,\xi)\big),$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$,

$$\max_{v\in V} M\big(\xi,v,q^o(\xi)\big) = M\big(\xi,v^o(\xi),q^o(\xi)\big),$$

для всех $\xi \in [x_0,x_1)$.

4. Достаточное условие оптимальности. Предположим, что при ограничениях (2.1)-(2.6) требуется минимизировать функционал

$$S(u,v) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi\big(x,z(T_1,x),\dots,z(T_k,x)\big)\,dx + G\big(y(x_1),\dots,y(x_k)\big). \qquad (4.1)$$

Здесь $\varphi(x,z_1,z_2,\dots,z_k)$, $G(y_1,y_2,\dots,y_k)$ – заданные скалярные функции непрерывно дифференцируемые и выпуклые по $z_1,z_2,\dots,z_k$ и $y_1,y_2,\dots,y_k$ соответственно.

При сделанных предположениях, приращение критерия качества, соответствующее допустимым управлениям $\big(u^o(t,x),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$, $\big(\bar{u}(t,x) = u^o(t,x) + \Delta u(t,x)$, $\bar{v}(x) = v^o(x) + \Delta v(x)$, $\bar{z}(t,x) = z^o(t,x) + \Delta z(t,x)$, $\bar{y}(x) = y^o(x) + \Delta y(x)\big)$, представляется в виде

$$\Delta S(u^o,v^o) = \sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\varphi'\big(x,z^o(T_1,x),\dots,z^o(T_k,x)\big)}{\partial z_i}\,\Delta z(T_i,x)\,dx + \frac{\partial G\big(y^o(x_1),\dots,y^o(x_k)\big)}{\partial y_i} \times$$
$$\times\ \Delta y(x_i) + o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,x)\|\right) + o_2(\|\Delta y(x_i)\|). \qquad (4.2)$$

Введем функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,u,p^o) = p^{o'} \cdot f(t,x,u),$$
$$M(x,v,q^o) = q^{o'} \cdot g(x,v),$$

где $p = p^o(t,x)$, $q = q^o(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p^{o'}(t,x) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi'\big(x,z(T_1,x),\dots,z(T_k,x)\big)}{\partial z_i}\,\alpha_i(t)\,F(T_i,t;x)\,,$$

$$q^{o'}(x) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial G'\big(y^o(X_1),\dots,y^o(X_k)\big)}{\partial y_i}\,\beta_i(x)\,\Phi(X_i,x) +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial\varphi'\big(s, z^o(T_1,s), \dots, z^o(T_k,s)\big)}{\partial z_i} F(T_i,t_0;s)\,\Phi(s,x)\,ds.$$

С учетом введенных обозначений, формула приращения (4.2) представляется в виде

$$\Delta S(u^o,v^o) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \big[H\big(t,x,\bar{u}(t,x),p^o(t,x)\big) - H\big(t,x,u^o(t,x),p^o(t,x)\big)\big]dx\,dt -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} \big[M\big(x,\bar{v}(x),q^o(x)\big) - M\big(x,v^o(x),q^o(x)\big)\big]dx +$$

$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,x)\|\right) + o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta y(X_i)\|\right). \tag{4.3}$$

Поскольку функция $\varphi(x,z_1,z_2,\dots,z_k)$, $\big(G(y_1,y_2,\dots,y_k)\big)$ выпукла по $z_1,z_2,\dots,z_k$ $(y_1,y_2,\dots,y_k)$, то ясно, что $o_1\big(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,x)\|\big) \ge 0$, $o_2\big(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta y(X_i)\|\big) \ge 0$.

Учитывая это при помощи формулы приращения (4.3) доказывается

Теорема 4.1. При сделанных предположениях, для оптимальности допустимого управления $\big(u^o(t,x),v^o(x)\big)$ в задаче (2.1)-(2.7), (4.1), достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$H\big(\theta,\xi,u^o(\theta,\xi),p^o(\theta,\xi)\big) = \max_{u\in U} H\big(\theta,\xi,u,p^o(\theta,\xi)\big),$$

для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$,

$$M\big(\gamma,v^o(\gamma),q^o(\gamma)\big) = \max_{v\in V} M\big(\gamma,v,q^o(\gamma)\big),$$

для всех $\gamma \in [x_0,x_1)$.

Здесь (θ,ξ) – произвольная точка непрерывности управления $u^o(t,x)$, а γ – произвольная точка непрерывности управления $v^o(x)$.

5. Выводы. В статье для линейной задачи оптимального управления с линейным критерием качества при помощи метода приращений установлено необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Литература

1. Мансимов К.Б., Расулова Ш.М. Об одной специфичной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, № 1, с. 9-18.
2. Мансимов К.Б., Расулова Ш.М. Об одной задаче оптимального управления типа А.И. Москаленко // В сб. Актуальные проблемы математики и механики. Мат-лы международной конференции, посвященной 55 летию ИМ и М НАН Азербайджана. Баку, 2014, с. 138-140.
3. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального управления // Ж. Вычисл. Мат. и матем. физ. 1969, т. 9, № 1, с. 68-95.
4. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971, 21 с.
5. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М. наука, 1969, 384 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, Наука и техника. 1974, 272 с.
7. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку. Изд-во ЭЛМ, 2010, 363 с.

8. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу // Ж. Вычисл. Мат. и матем .физ. 1975, т. 15, № 5, с. 1157-1167.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 272 с.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. Наука, 1979, 429 с.
11. Mənsimov K.B. Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə. Bakı. BDU nəşriyyatı. 1998, 114 s.

UOT 517.952

Ş.M. Rəsulova

Bir xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq şərtləri

Xətti keyfiyyət meyarlı bir xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. L.S. Pontryaginin maksimum prinsipi formasında optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat olunmuşdur. Maksimum prinsipinin kafi olduğu qeyri-xətti keyfiyyət meyarlı bir sinif məsələ göstərilmişdir.

Açar sözlər: Pontryaginin maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, qabarıq funksional, xətti optimal idarəetmə məsələsi

Sh.M. Rasulova

Optimality conditions in one linear optimal control problem

The paper investigates one linear optimal control problem with linear quality functional, proving the necessary and sufficient optimality condition in the form of Pontryagin's maximum principle.

Keywords: Pontryagin’s maximum principle, necessary and sufficient optimality condition, convex functional, linear optimal control problem

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 30.10.2015