Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVI, No.3, 2016
www.icp.az/2016/3-01.pdf

УДК 519.622

К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, С.Г. ТАЛЫБОВ, В.А. ГАШИМОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫМИ ГАСИТЕЛЯМИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется численное решение задачи оптимального управления процессами стабилизации колебаний двумерной тонкой пластины. Стабилизация осуществляется за счет управляемых точечных гасителей колебаний, установленных на пластине. Оптимизируемыми являются как места размещения, так и режимы функционирования гасителей колебаний. Для численного решения использованы методы оптимизации первого порядка, для применения которых получены формулы градиента функционала задачи. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: колебание пластины, успокоение колебания, δ-функция, градиент функционала, место размещения гасителя

1. Введение. Проблема стабилизации, успокоения колебательных процессов занимает важное место в практических приложениях. На некоторых технических объектах создаются системы автоматического управления и стабилизации возникающих колебаний с использованием современных средств компьютерной техники, телеизмерения и управления.

В отличие от ранее исследованных задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами, в частности, процессом успокоения колебания, в данной работе приводится постановка и решение задачи не только оптимального управления режимами функционирования гасителей колебаний двухмерной пластины произвольной формы, но и оптимизации размещения самих гасителей [1-6]. Предполагается, что функция внешнего источника колебаний пластины задана. В работе получены формулы градиента функционала как по компонентам размещения, так и для самих воздействий гасителей. С использованием полученных формул для градиента функционала приведены численные эксперименты с применением эффективных численных методов оптимизации первого порядка [4].

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая задача оптимального управления процессом успокоения колебаний пластины, описываемого уравнением в частных производных гиперболического типа:

$$
\begin{gathered}
u''_{tt}(x,t) = a\Delta u(x,t) - \gamma u'_t(x,t) + f(x,t) + W(x,t),\\
W(x,t) = \sum_{i=1}^{l} V_i(x,t),\ \ V_i(x,t) = v_i(t)\delta(x-\bar{x}_i),\ \ i=1,\dots,l,\\
V(x,t) = \big(V_1(x,t),\dots,V_l(x,t)\big),^*\\
(x,t) = (x_1,x_2,t) \in Q = \Omega\times[0,T],\ \ \Omega\subset R^2,
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

с начальными и краевыми условиями:

$$
\begin{gathered}
u(x,0) = \varphi_0^H(x),\\
u'_t(x,0) = \varphi_1^H(x),\ \ x\in\Omega
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

$$
u(x,t)|_{x\in\Gamma} = \varphi^\Gamma(x,t),\ \ x\in\Gamma,\ \ t\in[0,T], \tag{2.3}
$$

Здесь $a = const > 0$; Δ – двумерный оператор Лапласа; $\delta(\cdot)$ – двумерная функция Дирака; $\Omega\subset R^2$ – заданная односвязная открытая выпуклая область с границей Γ; заданные функции $f(x,t)\in L_2(Q)$, $\varphi_0^H(x)\in H^1(\Omega)$, $\varphi_1^H(x)\in L_2(\Omega)$, $\varphi^\Gamma(x,t) = H^{1,0}(\Gamma_T), \Gamma_T = \Gamma\times[0,T]$ определены в области Ω при $t\geq 0$; точки сосредоточения l – гасителей колебаний $\bar{x} =$

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)^*$, $\bar{x}_i = (\bar{x}_{1i}, \bar{x}_{2i}) \in \Omega$, $i = 1, \dots, l$, и их мощности $v(t) = \big(v_1(t), \dots, v_l(t)\big)^* \in L_2^l[0,T]$ вместе с решением краевой задачи (2.1)-(2.3) $u(x,t) \in H^{1,1}(Q)$ – не заданы; «*» – знак транспортирования.

Функцию $W(x,t)$ будем называть управляющей функцией, определяемой месторасположением гасителей и их воздействиями, т.е. парами $(v_i(t), \bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, l$.

Предполагается, что колебания пластины происходят в упругой среде с коэффициентом упругости (сопротивления среды) $\gamma = const$ под воздействием внешнего неуправляемого источника, определенного заданной функцией $f(x,t)$. Например, внешнее воздействие может осуществляться на какую-либо окрестность заданной точки области Ω, начиная при $t = 0$, а далее затухать. В качестве такой функции может выступать

$$f(x,t) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 \|x-\tilde{x}\|_{R^2}^2 - \alpha_3 t}, \quad t \geq 0, \quad \tilde{x} \in \Omega,$$

где $\tilde{x} \in \Omega$ – заданная точка, определяющая эпицентр внешнего воздействия; $\alpha_i, i = 1,2,3$ – заданные параметры воздействия; $\|\cdot\|_{R^2}$ – евклидова норма.

Под решением краевой задачи (2.1)-(2.3), соответствующем допустимому управлению $v(t)$, понимается функция, след которой при $t = 0$ совпадает с $\varphi_0^H(x)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_Q \big[a p_x(x,t) u(x,t) - p_t(x,t) u_t'(x,t) - p(x,t)\big(f(x,t) + W(x,t)\big)\big]\, dx\, dt$$
$$+ a \int_0^T p_x(x,t) \varphi^\Gamma(x,t)\, dx|_{x\in\Gamma} - \iint\limits_\Omega p(x,0) \varphi_1^H(x)\, dx = 0,$$

для всех функций $p(x,t) \in H^{1,1}(Q)$, след которых при $t = T$ равен 0 [4, с.583].

Задача заключается в определении мест расположения гасителей $\bar{x}$ и соответствующих управляющих воздействий $v(t)$, удовлетворяющих следующим технологическим ограничениям:

$$\bar{x}_i \in \Omega_i \subset \Omega, \quad i = 1, \dots, l, \tag{2.4}$$

$$\underline{v_i} \leq v_i(t) \leq \overline{v_i}, \quad i = 1, \dots, l, \text{ почти всюду } t \in [0,T], \tag{2.5}$$

при которых ε – успокоение пластины, т.е. выполнение условия

$$J_T(v, \bar{x}) = \|u(x,T) - U(x)\|_\bullet^2 \leq \varepsilon \tag{2.6}$$

будет осуществлено наискорейшим образом, т.е. за минимальное время T. Здесь Ω_i – заданная подобласть Ω, в которой возможно размещение i-того гасителя колебаний, $i = 1, \dots, l$; $U(x)$ – заданная в Ω функция; $\varepsilon > 0$ – заданное число, характеризующее степень «успокоения» колебаний, задаваемое из практических соображений; $\|\cdot\|_\bullet$ – какая-либо заданная норма. В частности, нами будет использована следующая норма:

$$J_T(v, \bar{x}) = \iint\limits_\Omega [u(x,T) - U_0(x)]^2\, dx + \alpha_0 \iint\limits_\Omega [u_t'(x,T) - U_1(x)]^2\, dx. \tag{2.7}$$

Здесь $U_0(x)$, $U_1(x)$ – заданные функции; $\alpha_0 \geq 0$ – заданный весовой коэффициент.

Постановку задачи (2.1)-(2.7) можно отнести к классу задач оптимального быстродействия объектами с распределенными параметрами. В случае заданных (не оптимизируемых) мест размещения точечных воздействий $\bar{x}$ во многих работах, в частности [1, 3, 5-8], исследованы вопросы существования единственности решения задачи оптимального управления, получены необходимые и достаточные условия оптимальности как в форме принципа максимума, так и в вариационном виде, имеются результаты численных экспериментов.

Отметим, что рассматриваемая задача не линейна, в общем случае не выпукла по оптимизируемым параметрам, следовательно, можно ожидать, что она многоэкстремальна. В этом случае под решением задачи понимается отыскание какого-либо локального оптимума, в частности, ближайшего к некоторому заданному начальному приближению $(v(t), \bar{x})^0$.

Таким образом в рассматриваемой задаче (2.1)-(2.7) требуется определить следующие параметры и функции: T – минимальное время переходного процесса с начальными условиями (2.2) к состоянию, удовлетворяющему условию (2.6); допустимые места расположения точечных воздействий $\bar{x}_i$ и соответствующие воздействия $v_i(t)$, $i = 1, \dots, l$, обеспечивающие оптимальное затухание колебаний; непосредственно сам колебательный процесс $u(x,t), x \in \Omega, \mathrm{t} \in (0, T]$.

Отметим важную специфику процесса, описываемого уравнением (1.1). В случае $\gamma > 0$, что соответствует влиянию на колебательный процесс сил упругости (сопротивления) пластины или среды, учитывая то, что внешнее воздействие $f(x,t)$ является затухающим во времени, рассматриваемый колебательный процесс и без функционирования гасителей (т.е $v_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, l$) является самоуспокаивающимся при условии, если для $x \in \Gamma$ при $t \to \infty$ функция $\varphi^\Gamma(x,t)$ стремится к какой-либо постоянной величине, к которой будет стремится и состояние пластины в целом. Следовательно найдется такое конечное время Т, при котором колебания пластины будут малы, а ее состояние удовлетворяет условию (2.6).

3. Подход к решению задачи (2.1)-(2.3). Ниже предлагается двухуровневый подход к решению рассматриваемой задачи, заключающийся в раздельной оптимизации времени переходного процесса T и оптимизируемых параметров $(v_i(t), \bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, l$. На верхнем уровне оптимизируется время переходного процесса T с применением какого-либо метода одномерной оптимизации, при минимально возможном значении которого выполняется условие (2.6). При каждом фиксированном значении T, выбранным алгоритмом одномерной оптимизации, решается задача минимизации функционала $J_T(v, \bar{x})$ для определения соответствующих $(v_T(t), \bar{x}_T)$ [4].

В качестве алгоритма одномерной оптимизации по T может быть использован, например, метод деления пополам с предварительным отысканием промежутка неопределенности $[\underline{T}, \overline{T}]$ такого , что

$$J^*_{\underline{T}}(v_{\underline{T}}, \bar{x}_{\underline{T}}) = \min_{v(t),\bar{x}} J_{\underline{T}}(v, \bar{x}) \geq \varepsilon,$$
$$J^*_{\overline{T}}(v_{\overline{T}}, \bar{x}_{\overline{T}}) = \min_{v(t),\bar{x}} J_{\overline{T}}(v, \bar{x}) \geq \varepsilon.$$

Ясно, что основная сложность предлагаемого подхода заключается в проведении второго уровня оптимизации – определении оптимальных $(v_T(t), \bar{x}_T)$ при заданном времени завершения процесса T, т.е решения задачи оптимального управления (1)-(5), (7) с фиксированным временем завершения процесса T. Для решения этой задачи предлагается использовать один из каких-либо эффективных методов условной оптимизации первого порядка, в частности, метод проекции градиента:

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ \bar{x} \end{pmatrix}^{k+1} = P\left[\begin{pmatrix} v(t) \\ \bar{x} \end{pmatrix}^{k} - \alpha \begin{pmatrix} grad_v J_T(v^k, \bar{x}^k) \\ grad_{\bar{x}} J_T(v^k, \bar{x}^k) \end{pmatrix}\right], \ \ k = 0,1, \dots, \tag{3.1}$$

где P – оператор проектирования оптимизируемых параметров на допустимую область, определенную ограничениями (2.4), (2.5).

Получим формулы для компонент градиента функционала $grad_v J_T(v, \bar{x})$ и $grad_{\bar{x}} J_T(v, \bar{x})$. Для этого используем метод приращения оптимизируемых параметров.

Пусть $W(x,t)$ – допустимое управление, определяемое допустимыми управляющими воздействиями $v(t) = \left(v_1(t),\dots,v_l(t)\right)^*$ в допустимых точках $\bar{x} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_l)^*$, которому соответствует $u(x,t) = u(x,t;W)$ – решение краевой задачи (2.1)-(2.3). Пусть функция управления $W(x,t)$ получила допустимое приращение $\partial W(x,t)$: $\widetilde{W}(x,t) = W(x,t) + \partial W(x,t)$, определяемое приращением пары $\left(\tilde{x} = \bar{x} + \partial\bar{x}, \tilde{v}(t) = v(t) + \partial v(t)\right)$, а соответствующее решение краевой задачи (2.1)-(2.3) получило приращение $\partial u(x,t)$:

$$\tilde{u}(x,t;\partial W) = u(x,t) + \partial u(x,t).$$

Определим приращение функционала (1.7):

$$\partial J_T(v,\bar{x}) = J_T(\tilde{v},\bar{x}) - J_T(v,\bar{x}) =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left\{\left[u\left(x,T;\widetilde{W}\right) - U_0(x)\right]^2 - \left[u(x,T;W) - U_0(x)\right]^2\right\} dx$$

$$+ \alpha_0 \iint\limits_{\Omega} \left\{\left[u_t'\left(x,T;\widetilde{W}\right) - U_1(x)\right]^2 - \left[u_t'(x,T;W) - U_1(x)\right]^2\right\} dx.$$

Введем следующую краевую задачу, которую назовем сопряженной относительно задачи (2.1)-(2.7):

$$\psi_{tt}''(x,t) = a\Delta\psi(x,t) + \gamma\psi_t'(x,t), \;\; (x,t) \in Q, \tag{3.2}$$

$$\psi(x,T) = -2\left(u_t'(x,T) - U_1(x)\right), \;\; x \in \Omega \cup \Gamma,$$

$$\psi_t'(x,T) = 2\alpha_0\left(u(x,T) - U_0(x)\right), \;\; x \in \Omega \cup \Gamma, \tag{3.3}$$

$$\psi(x,t)|_{x\in\Gamma} = 0, \;\; t \in [0,T].$$

За решение задачи (3.1)-(3.3) принимается функция $\psi(x,T) \in H^{1,1}(Q)$, удовлетворяющая условиям задачи в обобщенном смысле [4, с.584].

Проведя выкладки, аналогичные приведенным, например, в работах [4, 7, 8], для приращения функционала получим:

$$\partial J_T(v,\bar{x}) = \int\limits_0^T \iint\limits_{\Omega} \psi(x,t)\partial W(x,t)\, dx\, dt + o(\|\partial W(x,t)\|). \tag{3.4}$$

Пусть $W(x,t)$ получило приращение $\partial W(x,t)$ только за счет приращения управляющих воздействий $\partial v(t) = \left(\partial v_1(t),\dots,\partial v_l(t)\right)^*$. Тогда, учитывая (2.2), имеем:

$$\partial W(x,t) = \sum_{i=1}^{l} \partial v_i(t)\delta(x - \bar{x}_i). \tag{3.5}$$

Из формулы (3.4), учитывая свойства δ – функции Дирака, градиент функционала задачи (2.1)-(2.7) по управляющим воздействиям $\upsilon(t)$ определится по формуле

$$grad_{v_i(t)} J_T(v,\bar{x}) = -\psi(\bar{x}_i,t), \;\; i = 1,\dots,l. \tag{3.6}$$

Теперь получим формулы для компонент градиента по координатам расположения гасителей. Пусть только координаты гасителей $\bar{x} = (\bar{x},\dots,\bar{\mathrm{x}}^l)$ получили приращение $\partial\bar{x}$, т.е.

$$\tilde{x} = \bar{x} + \partial\bar{x}, \;\; \tilde{x}^i = \bar{x}^i + \partial\bar{x}^i, \;\;\; \partial\bar{x}^i = \left(\partial\bar{x}_1^i, \partial\bar{x}_2^i\right)^*, \;\; i = 1,\dots,l,$$

а мощности гасителей $v(t)$ остались прежними.

Тогда согласно формуле (2.2) управляющая функция $W(x,t)$ получит следующее приращение:

$$\partial W(x,t) = W(\tilde{x},t) - W(\bar{x},t) = v_i(t)\left[\delta\left(\bar{x}^i + \partial\bar{x}^i\right) - \delta\left(\bar{x}^i\right)\right].$$

В этом случае главную часть приращения функционала, определяемую формулой (3.4), за счет приращения мест размещения $\bar{x}$ можно записать в виде

$$\partial_{\bar{x}} J_T(v,\bar{x}) = \sum_{i=1}^{l} \int_0^T \iint_\Omega \psi(x,t) v_i(t) \left[\delta\left(\bar{x}^i + \partial\bar{x}^i\right) - \delta\left(\bar{x}^i\right)\right] dx\, dt$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \int_0^T v_i(t) \left[\psi\left(\bar{x}^i + \partial\bar{x}^i, t\right) - \psi\left(\bar{x}^i, t\right)\right] dt \quad (3.7)$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \int_0^T v_i(t) \langle \nabla_{x_i} \psi(\bar{x},t), \partial\bar{x}^i \rangle\, dt + o\left(\|\partial\bar{x}\|_{R^{2l}}\right).$$

Здесь: $\nabla_{x_i}\psi(\bar{x},t) = \left(\psi'_{x_1}(x,t), \psi'_{x_2}(x,t)\right)^*\Big|_{x=\bar{x}^i}$, $\langle a,b\rangle$ – скалярное произведение векторов $a, b \in R^2$.

Тогда из формулы (3.7) компоненты градиента (производных) функционала задачи (2.1)-(2.7) по координтам мест размещения гасителей определятся формулой

$$grad_{\bar{x}^i} J_T(v,\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{x}^i} = -\int_0^T v_i(t) \nabla_x \psi(\bar{x},t)|_{x=\bar{x}^i} dt, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.8)$$

или в покомпонентной форме:

$$\frac{\partial J_T(v,\bar{x})}{\partial \bar{x}_j^i} = -\int_0^T v_i(t)\, \psi'_{x_j}(x,t)\Big|_{x=\bar{x}^i} dt, \quad j = 1,2, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.9)$$

Таким образом, подход к численному решению задачи (2.1)-(2.7) заключается в следующем. Как было сказано в начале данного раздела, для отыскания минимального времени T, требуемого для успокоения процесса, т.е. выполнения условия (2.6), сначала используется «метод шагов» для определения промежутка неопределенности минимального времени успокоения $T \in \left[\underline{T}, \overline{T}\right]$ с применением при необходимости для дальнейшего уточнения какого-либо метода одномерного поиска (золотого сечения, деления пополам и т.п.).

При каждом заданном времени завершения процесса T для определения соответствующей оптимальной пары $(v(t),\bar{x})$ строится минимизирующая последовательность с использованием, например, процедуры (3.1).

С этой целью на каждой k-той итерации (3.1) при текущих значениях $(v(t),\bar{x})^k$ решается прямая краевая задача (2.1)-(2.3) по определению функции $u(x,t)$, далее решается сопряженная задача (3.2), (3.3) и определяется функция $\psi(x,t)$, участвующая в формуле (3.6) для компонент градиента в пространстве управляющих воздействий $v(t)$ и в пространстве компонент $\bar{x} \in R^{2l}$ оптимизируемых мест размещения гасителей. Процедура (3.1) проводится до тех пор, пока, например, на двух последовательных итерациях не выполнится какой-либо один из приводимых критериев останова процесса:

$$J(v^k(t),\bar{x}^k) - J(v^{k+1}(t),\bar{x}^{k+1}) = \int_0^T [v^k(t) - v^{k+1}(t)]^2\, dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=2}^{2} \left[\left(x_j^i\right)^k - \left(x_j^i\right)^{k+1}\right]^2 \le \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – заранее заданная величина, определяемая требуемой точностью выполнения условия установления (2.6).

4. Результаты численных экспериментов. Приведем результаты численного решения рассматриваемой задачи (2.1)-(2.7) при следующем задании тестовых исходных данных, участвующих в постановке:

$$a \equiv 1,\ \ \gamma = 0.2,\ \ L = 2,\ \ \varepsilon = 0.001,\ \ \Omega = \{x \in R^2:\ \ 0 \le x_i \le 1,\ \ i = 1,2\},$$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega:\ \ 0.05 \le x_i \le 0.45,\ \ i = 1,2\},\ \ \Omega_2 = \{x \in \Omega:\ \ 0.55 \le x_i \le 0.95,\ \ i = 1,2\},$$

$$\underline{v_i} = -2;\ \ \overline{v_i} = 2;\ \ i = 1,2,\ \ \tilde{x} = (0.2; 0.2)^*,\ \ \alpha_1 = 10,\ \ \alpha_2 = 2,\ \ \alpha_3 = 1,\ \ \alpha_0 = 1,$$

$$\varphi_0^H(x) \equiv 0,\ \ x \in \Omega,$$

$$\varphi_1^H(x) \equiv 0,\ \ x \in \Omega,$$

$$\varphi^\Gamma(x,t) \equiv 0,\ \ x \in \Omega,\ \ t \in [0,T],$$

$$U_0(x) \equiv 0,\ \ \ U_1(x) \equiv 0,\ \ x \in \Omega.$$

Для решения краевой задачи (2.1)-(2.3) при заданных T, $(v(t), \bar{x})$ использовалась неявная схема метода сеток с переменными направлениями (метод дробных шагов) [9, с.213; 10, с.432]. Шаги сетки h_x по x_1, x_2 и h_t по t соответственно были равны 0,005. Для аппроксимации δ – функции Дирака использовалась функция типа плотности распределения Гаусса [1, 11]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ \ x \in R.$$

Величина σ выбиралась равной $3h_x$, а величина σ_1 при этом была равна

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3h_x}^{3h_x} e^{-\frac{x^2}{18\sigma^2}} dx.$$

В этом случае очевидно удовлетворяется условие

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-3h_x}^{3h_x} e^{-\frac{x^2}{18\sigma^2}} dx = 1,$$

необходимое для корректной аппроксимации δ – функции Дирака.

В таблице 1 приведены результаты расчета в начальной точке $\bar{x}_1^0 = (0.3; 0.4)^*$, $\bar{x}_2^0 = (0.7; 0.7)^*$, $v_1^0(t) = v_2^0(t) = 2$, $t \in [0,T]$, при $T = 1$ компонент градиента функционала по $\bar{x}$ и в некоторые выборочные моменты времени t по производные $v(t)$ с использованием предложенных выше формул и следующей формулы центральной разности для конечноразностной аппроксимации производных первого порядка

$$\frac{\partial J_T(z)}{\partial z_i} \approx \frac{J_T(z + \tilde{\varepsilon} e_i) - J_T(z - \tilde{\varepsilon} e_i)}{2\tilde{\varepsilon}},\ \ i = 1, \dots, 2N_t + 4 \tag{4.1}$$

Здесь z является $(2N_t + 4)$-мерным вектором, $N_t = [T/h_t]$, включающим в себя 4 координаты размещения двух гасителей и N_t сеточных значений соответствующих управляющих воздействий $v_1(t)$, $v_2(t)$; e_i есть $(2N_t + 4)$-мерный вектор, состоящий из нулей, кроме -той компоненты, равной единице; $\tilde{\varepsilon}$ – малая положительная величина; $[a]$ – означает целую часть числа a.

Таблица 1
Значения компонент градиента функционала

Формулы	$\nabla_{\bar{x}^1} J$	$\nabla_{\bar{x}^2} J$	$\nabla_{v_1(t)} J(v(t), \bar{x})$				$\nabla_{v_2(t)} J(v(t), \bar{x})$			
			t=0.2	t=0.4	t=0.6	t=0.8	t=0.2	t=0.4	t=0.6	t=0.8
(3.6), (3.9)	0.58;0.27	-0.55;-0.53	0.098	0.079	0.022	-0.065	0.083	0.097	0.018	-0.057
(4.1)	0.59;0.29	-0.55;-0.51	0.098	0.080	0.022	-0.068	0.083	0.095	0.020	-0.060

В таблице 2 приведены результаты решения задачи оптимизации $(v(t), \bar{x})$ для разных значений T_k:

$$J_{T_k}^* = \min_{v(t), \bar{x}} J_{T_k}(v(t), \bar{x}), \quad T_k = 0.4 + 0.1k, \quad k = 1, \dots, 7.$$

Таблица 2
Результаты решения задачи

T	x_1^0	x_2^0	$v_1^0(t)$	$v_2^0(t)$	J^0	x_1^*	x_2^*	J^*	Число итераций
0.5	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	1.4476	0.2831; 0.2831	0.5500; 0.5500	0.0439	121
0.6	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	0.7026	0.3983; 0.3931	0.5500; 0.5500	0.0477	110
0.7	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	0.5166	0.4500; 0.4500	0.9162; 0.9162	0.0189	135
0.8	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	1.1953	0.3041; 0.3042	0.6984; 0.6983	0.0075	183
0.9	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	2.0070	0.2018; 0.2018	0.5500; 0.5500	0.0027	351
1.0	0.2; 0.3	0.7; 0.7	1.0	1.0	2.3959	0.4500; 0.4500	0.7841; 0.7839	0.0009	403

5. Заключение. В статье предложен подход к решению задачи наискорейшей стабилизации колебательного процесса тонкой пластины, возникшего в результате воздействия на пластину внешнего воздействия. Колебания пластины описываются начально-краевой задачей относительно уравнения с частными производными гиперболического типа. Оптимизируемыми в задаче являются как месторасположения заданного числа гасителей колебаний, так и законы их функционирования.

Для решения задачи предлагается подход, в котором проводится раздельная оптимизация времени завершения процесса, а при каждом заданном времени завершения используется численный метод оптимизации первого порядка. Получены формулы для компонент градиента функционала по оптимизируемым параметрам.

Предлагаемый в работе подход может быть использован в решении задач оптимального размещения сосредоточенных управлений стабилизаторами колебательных процессов, описываемых другими типами и видами начально-краевых задач.

Приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи.

Литература

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука,1975, 568 с.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами // Успехи матем. наук. 1985. Т.40. Вып. 4. с. 55-68.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 714 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002. 824 с.
5. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. // Дифференциальные уравнения. Т.36. 2000. № 11 . с. 1513-1528.
6. Кулиев Г.Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. с. 80-84.
7. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Оптимальное управление переходными процессами в трубопроводах. “Palmarium” Academic Publishing, Deutschland. 2014. 139 с.
8. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Численное исследование задачи быстродействия при управлении колебательными процессами краевыми и промежуточными сосредоточенными управляющими воздействиями // Известия НАН Азерб., сер. ФТМН, 2015. с. 22-33.
9. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир. 1972. 418 с.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.
11. Айда-заде К.Р., Багиров А.Г. О задаче размещения нефтяных скважин и управление их дебитами// Автоматика и телемеханика. №1, 2006, с.52-62

UOT 519.622

K.R. Ayda-zadə, S.Q. Talıbov, V.A. Həşimov

Lövhədə rəqslərin nöqtəvi söndürücülərinin yerləşdirilməsinin optimallaşdırılması və idarəedilməsi

İkiölçülü nazik lövhədə rəqslərin söndürülməsinin optimal idarəedilməsi məsələsi tədqiq olunmuşdur. Sakitləşmə lövhədə yerləşdirilmiş idarəedici nöqtəvi rəqs söndürücüləri hesabına yerinə yetirilir. Burada nöqtəvi sakitləşdiricilərin yerləşmələri və gücləri optimallaşdırılır. Məsələnin ədədi həll üsulu üçün birinci tərtib optimallaşdırma üsulları tətbiq olunur ki, burada funksionalın alınmış qradientləri istifadə olunur. Ədədi eksperimentlərin nəticələri verilmişdir.

Açar sözlər: lövhənin rəqsi, rəqslərin sakitləşdirilməsi, δ - funksiya, funksionalın qradienti, söndürücülərin yerləşmə yeri

K.R. Aida-zade, S.G. Talıbov, V.A. Hashimov

Optimization and control of placements of point dampers on the plate

The problem of optimal control by processes of stabilization of the two-dimensional thin plate variations is investigated. The stabilization is carried out by point-controlled dampers of vibrations installed on the plate. The placements and modes of operation of dampers are optimized. The methods of optimization of the first order are used for the numerical solution. The formulas for the functional gradient are obtained. The results of numerical experiments are given.

Keywords: vibrations of the plate, soothing vibration, δ - function, functional gradient, the placement of damper

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

Представлено 11.03.2016