Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.3, 2017
www.icp.az/2017/3-01.pdf

УДК 517.917.52

Н.Г. АБДУЛЛАЕВА, К.Б. МАНСИМОВ

ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Рассматривается задача о минимуме функционала типа максимума на решениях системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Получен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: интегральное уравнение типа Вольтерра, задача на минимакс, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина

1. Введение. Задачи оптимального управления с гладким критерием качества, описываемые интегральными уравнениями типа Вольтерра, изучены в ряде работ [1-4].

Но многие процессы более адекватно описываются с негладким функционалом качества [5-7]. Таким задачам относятся также задачи оптимального управления с функционалом типа максимум. В работах [5-7] и др. исследованы задачи оптимального управления описываемые дифференциальными уравнениями с функционалом типа максимум.

Предлагаемая же работа посвящена изучению одной задачи оптимального управления с функционалом качества типа максимум, описываемая интегральным уравнением типа Волтерра.

Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

2. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой интегральных уравнений типа Вольтерра.

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s),y)\,ds\ , \quad t \in T = [t_0, t_1]\,. \tag{2.1}$$

Здесь y – m-мерный вектор из Y, где Y – компактное множество из R^m, $f(t,s,x,u,y)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная в $T \times T \times R^n \times R^r \times R^m$ вместе с частными производными по x, и выполняющая условию Липшица по u, а t_0, t_1 – заданы.

В качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) – r-мерные вектор-функции управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$:

$$u(t) \in U\,, \quad t \in T\,. \tag{2.2}$$

Рассмотрим терминальный функционал

$$J(u) = \max_{y \in Y} \varphi(x(t_1,y),y), \tag{2.3}$$

где $\varphi(x,y)$ – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с $\varphi_x(x,y)$.

Требуется минимизировать функционал (2.3) при ограничениях (2.1)-(2.2) (задача (2.1)-(2.3)). При этом предполагается, что в задаче (2.1)-(2.3) существует управление $u^o(t)$ и соответствующее семейство решений $\{x^o(t,y),\ y \in Y\}$ системы (2.1), доставляющие минимум функционалу (2.3).

3. Основные результаты. Считая $u^o(t)$ оптимальным управлением, введем множество

$$Y_o = \{y \in Y\colon\ \varphi(x^o(t_1,y),y)\} = \max_{\bar{y} \in Y} \varphi(x(t_1,\bar{y}),\bar{y})\,.$$

Множество Y_o есть компакт [5-8].

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H\big(t,y,x(t,y),u(t),\psi(t,y)\big) = -\varphi'_x(x(t_1,y),y)\, f(t_1,t,x(t,y),u(t),y) + \\ + \int_t^{t_1} \psi'(s,y)\, f(s,t,x(t,y),u(t),y)\, ds$$

и обозначение

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H\big(t,y,x(t,y),u(t),\psi(t,y)\big) = H\big(t,y,x(t,y),\bar{u}(t),\psi(t,y)\big) - H\big(t,y,x(t,y),u(t),\psi(t,y)\big).$$

Здесь $\psi(t,y)$ n-мерная вектор-функция, являющаяся решениям интегрального уравнения

$$\psi(t,y) = \int_t^{t_1} f_x{}'(s,t,x(t,y),u(t),y)\, \psi(s,y)\, ds - \varphi_x{}'(x(t_1,y),y)\, f_x(t_1,t,x(t,y),u(t),y)\,. \quad (3.1)$$

Далее через $R(t,\tau,y)$ обозначим резольвенту линеаризованной задачи, являющуюся решением уравнения

$$R(t,\tau,y) = \int_\tau^t f_x(t,s,x(s,y),u(s),y)\, R(s,\tau,y)\, ds + f_x(t,\tau,x(\tau,y),u(\tau),y)\,. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Для оптимальности $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы при всех $\theta \in [t_0,t_1)$ выполнялось условие

$$\int_{Y_0} H\big(\theta,y,x(\theta,y),u(\theta),\psi(\theta,y)\big)\, d\mu(y) = \max_{v\in V} \int_{Y_0} H\big(\theta,y,x(\theta,y),v,\psi(\theta,y)\big)\, d\mu(y)\,, \quad (3.3)$$

где $\mu(y)$ – некоторая неотрицательная мера, сосредоточенная на множестве Y_0 , а $\theta \in [t_0,t_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u(t)$.

Доказательство. Считая $u(t)$ оптимальным управлением его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta,\theta+\varepsilon)\,, \\ 0\,, & t \in T\backslash[\theta,\theta+\varepsilon)\,. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь $v \in U$ – произвольный вектор, $\varepsilon > 0$ достаточно малое число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Через $\Delta x_\varepsilon(t,y)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$ соответствующее специальному приращению (3.4) управления.

Из (2.1) ясно, что $\Delta x_\varepsilon(t,y)$ является решением уравнения

$$\Delta x_\varepsilon(t,y) = \int_{t_0}^t [f(t,s,x(s,y)+\Delta x_\varepsilon(s,y),u(s)+\Delta u_\varepsilon(s),y) - f(t,s,x(s,y),u(s),y)]\, ds\,. \quad (3.5)$$

Из (3.5) переходя к норме и используя условия Липщица, а также применяя лемму Гронуолла-Беллмана получим

$$\|\Delta x_\varepsilon(t,y)\| \le L \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_\varepsilon(s)\|\, ds \le L \int_\theta^{\theta+\varepsilon} (v - u(s))\,, \quad (3.6)$$

где $L = const > 0$ есть некоторое постоянное.

Далее используя формулу Тейлора из (3.5) получим, что $\Delta x_\varepsilon(t,y)$ является решением следующей линеаризованной задачи

$$\Delta x_\varepsilon(t,y) = \int_{t_0}^{t} \big[f_x\big(t,s,x(s,y),u(s,y)\big)\,\Delta x_\varepsilon(s,y) + \Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(t,s,x(s,y),u(s),y) +$$
$$+\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f_x\big(t,s,x(s,y),u(s)\big)\,\Delta x_\varepsilon(s,y) + o_1(\|\Delta x_\varepsilon(s,y)\|)\big]\,ds\,. \qquad (3.7)$$

Из оценки (3.6), с учетом теоремы о среднем, следует, что $\|\Delta x_\varepsilon(t,y)\|$ имеет порядок малости ε, другими словами $\|\Delta x_\varepsilon(t,y)\|$ и ε имеют одинаковый порядок малости, т.е.

$$\|\Delta x_\varepsilon(t,y)\| = O(\varepsilon)\,, \quad t \in T. \qquad (3.8)$$

Поэтому из (3.7) следует, что $\Delta x_\varepsilon(t,y)$ является решением линеаризованного уравнения

$$\Delta x_\varepsilon(t,y) = \int_{t_0}^{t} \big[f_x(t,s,x(s,y),u(s),y)\,\Delta x_\varepsilon(s,y) + \Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(t,s,x(s,y),u(s),y)\big]\,ds +$$
$$+o(\varepsilon;t)\,. \qquad (3.9)$$

Интерпретируя уравнение (3.9) как линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра, на основе формулы о представлении решений линейных интегральных уравнений [9-11] имеем

$$\Delta x_\varepsilon(t,y) = \int_{t_0}^{t} \Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(t,s,x(s,y),u(s),y)\,ds +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{s}^{t} R(t,\tau,y)\,\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(\tau,s,x(s,y),u(s),y)\,d\tau\right] ds + o(\varepsilon)\,, \qquad (3.10)$$

где $R(t,\tau,y)$ $(n\times n)$ – матричная функция, являющаяся решением уравнения (3.2).

Из представления (3.10) следует, что

$$\Delta x_\varepsilon(t_1,y) = \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(t_1,s,x(s,y),u(s),y)ds +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{s}^{t_1} R(t,\tau,y)\,\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)} f(\tau,s,x(s,y),u(s),y)\,d\tau\right] ds + o(\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon\left[\Delta_v f(t_1,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y) + \int_{\theta}^{t_1} R(t_1,\tau,y)\,\Delta_v f(\tau,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y)\,d\tau\right].$$

Следовательно

$$\Delta x_\varepsilon(t_1,y) =$$
$$= \varepsilon\left[\Delta_v f(t_1,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y) + \int_{\theta}^{t_1} R(t_1,\tau,y)\,\Delta_v f(\tau,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y)\,d\tau\right] + o(\varepsilon). \qquad (3.11)$$

Используя представление (3.11) специальное приращение функционала качества (2.3) представляется в виде

$$\Delta_\varepsilon J(u) = \varepsilon \max_{y\in Y_0} \delta J(u,y) + o(\varepsilon),$$

где по определению

$$\delta J(u,y) = \frac{\partial \varphi'(x(t_1,y),y)}{\partial x} \times$$

$$\times\left[\Delta_v f(t_1,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y)+\int_{\theta}^{t_1} R(t_1,\tau,y)\,\Delta_v f(\tau,\theta,x(\theta,y),u(\theta),y)\,d\tau\right]. \quad (3.12)$$

Из (3.12) ясно, что $\delta J(u,y)$ непрерывна по y, причем она не принадлежит [12] множеству K непрерывных функций $g(y)$, отрицательных на Y_0, т.е.

$$K=\{g(y):\ g(y)<0,\ \ y\in Y_0\}.$$

В противном случае не выполнялось бы условие оптимальности $\Delta_\varepsilon J(u)\geq 0$, при достаточно малых ε.

Множество K выпуклое. Поскольку $\delta J(u,y)$ не принадлежит множеству K, то по теореме об отделимости выпуклых множеств найдется линейный непрерывный функционал $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}\in C^*(Y_0)$ такой, что

$$\mathcal{L}\big(\delta J(u,y)\big)\geq\mathcal{L}\big(g(y)\big), \quad (3.13)$$

для всех $g(y)\in K$. Как отмечено в [12] $\mathcal{L}\geq 0$.

По теореме об общем виде линейного функционала [13] из неравенства (3.13) следует, что существует некоторая мера $\mu(y)$, сосредоточенная на множестве Y_0, что

$$\mathcal{L}\big(\delta J(u,y)\big)=\int_{Y_0}\delta J(u,y)\,d\mu(y)\geq 0. \quad (3.14)$$

В силу того, что $\mathcal{L}\geq 0$, получая, что $\mu(y)\geq 0$.

Предположим

$$\psi(t,y)=-R(t_1,t,y)\frac{\partial\varphi(x(t_1,y),y)}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Используя (3.2) можно показать, что $\psi(t,y)$ определяемая формулой (3.15) является решением уравнения (3.1). С учетом этого из (3.14) получим утверждение теоремы.

Непосредственным следствием теоремы 3.1 является

Теорема 3.2. Предположим, что множество U выпукло, а вектор-функция $f(t,s,x,u,y)$ непрерывно дифференцируема также по u. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы при всех $\theta\in[t_0,t_1)$ выполнялось условие

$$\int_{Y_0}\frac{\partial H'\big(\theta,x(\theta,y),u(\theta),\psi^o(\theta,y)\big)}{\partial u}\,u(t)\,d\mu\,(y)=\max_{v\in U}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H\big(\theta,x(\theta,y),u(\theta),\psi^o(\theta,\gamma)\big)}{\partial u}\,v\,d\mu\,(y),$$

где $\mu(y)$ – некоторая неотрицательная мера, сосредоточенная на множестве Y_0, а $\psi(\theta,y)$ – решение уравнения (3.1).

4. Принцип стационарности. Пусть множество U открыто, а функции $f(t,s,x,u,y)$, $\varphi(x,y)$ удовлетворяют условиям гладкости из теоремы 3.2. Тогда из теоремы 3.1 следует

Теорема 4.1. (Принцип стационарности) При сделанных предположениях для того, чтобы управление $u(t)$ было оптимальным в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы при всех $\theta\in[t_0,t_1)$ выполнялось тождество

$$\int_{Y_0}\frac{\partial H'\big(\theta,x(\theta,y),u(\theta),\psi(\theta,y)\big)}{\partial u}\,d\mu\,(y)=0\,.$$

Здесь $\psi(t,y)$ – решение системы уравнений (3.1).

Заметим, что если правая часть системы (2.1) не зависит от y, то необходимым условием оптимальности управления $u(t)$ является аналог условия Эйлера вида

$$\frac{\partial H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u} = 0\,,$$

где $\psi(t)$ – решение системы

$$\psi(t) = \int_t^{t_1} f'_x\big(s, t, x(t), u(t), \psi(s)\big)\, ds - \int_{Y_0} \frac{\partial \varphi'(x(t_1), y)}{\partial x} f_x\big(t_1, t, x(t), u(t)\big)\, d\mu(y)\,.$$

Приведем одно следствие из теоремы 3.1.

Следствие 4.1. Если множество U открытое, то оптимальное управление $u(t)$ при всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и для всех $w \in R^r$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{Y_0} w' \frac{\partial^2 H\big(t, x(t,y), u(t), \psi(t,y)\big)}{\partial u^2}\, w\, d\mu\,(y) \le 0\,.$$

5. Заключение. Рассматривается минимаксная задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Получено общее необходимое условие оптимальности в форме условия максимума Понтрягина. Изучены отдельные конкретные случаи, позволяющие конкретизировать полученный результат.

Литература

1. Винокуров В.Р. Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов. Сер. Математика. 1967, № 7, с.21-33.
2. Carlson D.A. An elementary proof of the maximum principle for optimal control problems governed by a Volterra integral equation // Journ. of Optimiz. Theory and Appl. 1987, vol. 54, № 1, pp.43-61.
3. Medhin N.G. Optimal processes governed by integral equations // Journ. of Mathem. Analysis and Applications // 1986, vol. 120, № 1, pp.1-12.
4. Burnap C., Kazemi M. Optimal control of a systems governed by nonlinear Volterra integral equations with delay // JMA Journal of Mathematical Control and information. 1998, vol. 16, № 1, pp.73-89.
5. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квази-дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, с.432.
6. Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.Н. и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л., Изд-во ЛГУ, 1982, с.324.
7. Демьянов В.Ф., Никулина В.Н., Шаблинская И.Р. Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связами // Дифференц. уравнения. 1985, № 8, с.1324-1330.
8. Демьянов В.Ф. Минимакс: Дифференцируемость по направлениям. Л., Изд-во ЛГУ, 1974, с.112.
9. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральное уравнения. М. Физматлит., 2002, с.162.
10. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М. Физматлит., 2013, с.120.
11. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. М. Едитариал УРСС. 2009, с.232.
12. Альсевич В.В. Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации // Дифференц. уравнения. 1976, № 8, с.1384-1391.
13. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М. ИЛ. 1962, с.448.

UOT 517.917.52

N.H. Abdullayeva, K.B. Mənsimov

Volterra tipli inteqral tənliklərlə bir minimaks idarə məsələsi haqqında

Volterra tipli inteqral tənliyin həlləri üzərində təyin olunmuş maksimum tipli funksionalın minimum qiymət alması məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün bəzi birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: Volterra tip inteqral tənlik, minimaks məsələsi, optimallıq üçün zəruri şərt, Pontryaginin maksimum prinsipi

N.H. Abdullayeva, K.B. Mansimov

On a minimax control problems for Volterra type integral equations

The authors consider the problem of the minimum of a maximum-type functional through an investigation of solutions to a system of Volterra-type integral equations. A number of first-order necessary optimality conditions are obtained.

Keywords: Volterra-type integral equation, minimax problem, necessary optimality condition, Pontryagin's maximum principle

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Бакинский Государственный Университет

Представлено 09.06.2016