Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.6, 2017
www.icp.az/2017/6-02.pdf

UOT 519.622

V.A. HƏŞİMOV

ÇUBUĞUN QIZDIRILMA PROSESİNDƏ SƏRHƏD İDARƏNİN SİNTEZİNİN BİR MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

Çubuğun sərhəd idarəetməsi ilə qızdırılma prosesi misalı üzərində paylanmış parametrli sistemlərdə idarəetmə təsirlərinin sintezi məsələsi tədqiq edilmişdir. Əks əlaqə daxili nöqtələrdə prosesin vəziyyətinin ölçülmə qiymətləri ilə yerinə yetirilir ki, hansı ki, bu qiymətlər idarəetmənin formalaşmasında istifadə olunur. Məsələnin birinci tərtib ədədi optimallaşma üsullarının tətbiqi ilə həlli üçün zəruri düsturlar alınmışdır.

Açar sözləri: idarənin sintezi, ölçmə nöqtəsi, qeyri-lokal şərtlər, qradiyentin proyeksiyası üsulu

1. Giriş. Baxılan məsələdə paylanmış parametrli sistemlərdə idarəetmə təsirlərinin optimal sintezi tədqiq olunmuşdur. Misal olaraq, çubuğun uclarından birinə yaxın yerləşdirilmiş idarəedilən enerji mənbəyi ilə çubuğun qızdırılma prosesinin idarəedilməsinə baxılmışdır. Enerji mənbəyinin temperaturunun cari qiyməti çubuğun vəziyyətinin (temperaturunun) müəyyən nöqtələrində aparılan ölçmə qiymətlərindən asılı olaraq təyin olunur. Sintez olunan idarəetmə təsirlərinin ölçmə qiymətlərindən asılılığını elə təyin etmək tələb olunur ki, idarəedilən çubuğun qızdırılma prosesinin keyfiyyət meyarını təyin edən verilmiş funksional minimal qiymət alsın.

Toplanmış parametrli sistemlərdən fərqli olaraq, vəziyyəti xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunmuş paylanmış parametrli sistemlərdə idarəetmənin sintezi məsələləri yetərincə az tədqiq olunmuşdur [1-6].

Baxdığımız işdə bircins çubuğun qızdırılma prosesinin əks əlaqə ilə sərhəd idarəsinin sintezinin misalında ölçmə nöqtələrinin cari vəziyyətdən asılı olaraq sintez olunan idarənin xətti asılı olduğu parametrlərin optimallaşması məsələsi həll olunur. Baxılan məsələ ayrılmamış aralıq şərtləri saxlayan qeyri-lokal sərhəd şərtli parabolik tip diferensial tənliklərlə təsvir olunmuş prosesin parametrik optimal idarəedilməsi məsələsinə gətirilir.

Alınmış məsələni həll etmək üçün birinci tərtib ədədi optimallaşma üsulları təklif olunur. Bununla əlaqədar olaraq sintez olunan idarəetmənin (xarici enerji mənbəyinin temperaturu – sərhəd idarəetmə) parametrlərinə uyğun funksionalın qradiyent düsturları alınmışdır.

2. Məsələnin qoyuluşu. Ardıcıl olaraq eynitipli l uzunluqlu çubuqların uclarının birindən qızdırılması prosesinin [7] idarəedilməsi məsələsinə baxaq:

$$u_t'(x,t) = a^2 u_{xx}''(x,t) - \lambda_0[u(x,t) - \theta], (x,t) \in \Omega = [0,l] \times [0,T], \tag{2.1}$$

$$u_x'(0,t) = \lambda_1[u(0,t) - \vartheta(t)], t \in [0,T], \tag{2.2}$$

$$u_x'(l,t) = -\lambda_2[u(l,t) - \theta], t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Burada $u(x,t)$ – t zaman anında çubuğun x nöqtəsində temperaturu; θ – ətraf mühitin temperaturudur ki, sabit hesab olunur; $\vartheta(t)$ – idarəedilən mənbənin temperaturudur, zamandan asılı kəsilməz funksiyadır və aşağıdakı texnoloji məhdudiyyətləri ödəyir:

$$g(t,\vartheta) = d_1 - \left|\tilde{\vartheta}_{d_0}(t)\right| \geq 0, t \in [0,T], \tag{2.4}$$

$$\tilde{\vartheta}_{d_0}(t) = d_0 - \vartheta(t),$$

$a = \text{const}$, λ_0, λ_1, λ_2 əmsalları və d_0, d_1 parametrləri verilmişdir.

Fərz olunur ki, qızdırılan çubuğun başlanğıc temperaturu əvvəlcədən dəqiq verilməyib, lakin çubuğun başlanğıc temperaturunun mümkün Φ qiymətlər çoxluğu $\rho_\Phi(\varphi)$ sıxlıq funksiyası ilə məlumdur:

$$u(x,0) = \varphi = \text{const} \in \Phi. \tag{2.5}$$

Mümkün başlanğıc şərtlər çoxluğu sonlu ola bilər:

$$\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_\varphi}\right\},$$

hansı ki, i-ci qiymətin verilmiş ehtimal qiyməti aşağıdakı kimidir

$$p_i^{\varphi} = P(\varphi = \varphi_i) \in [0,1], \;\; i = 1, \dots, N_{\varphi}.$$

Analoji olaraq, ətraf mühitin $\theta = \mathrm{const}$ temperaturu eyni ilə dəqiq verilməyib, lakin mümkün Θ qiymətlər çoxluğunda verilmiş $\rho_{\Theta}(\theta)$ sıxlıq funksiyası ilə təyin edilə bilər:

$$\theta \in \Theta, t \in [0, T]. \tag{2.6}$$

Ətraf mühitin temperatur çoxluğunun sonlu olması mümkündür:

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_\theta}\},$$

burada ehtimalın verilmiş qiymətləri aşağıdakı kimidir:

$$p_j^{\theta} = P(\theta = \theta_j) \in [0,1], \;\; j = 1, \dots, N_{\theta}.$$

Prosesin davametmə müddəti həm əvvəlcədən verilmiş ola bilər, hansı ki, böyük zaman fasiləsidir (misal üçün, requlyatorların layihələndirilməsi məsələlərində), həm də adi optimal idarəetmə məsələlərində olduğu kimi optimallaşdırıla bilər. Baxdığımız məsələdə fərz edəcəyik ki, prosesin T davametmə müddəti verilmişdir.

$\vartheta(t)$ idarəetməsini elə təyin etmək tələb olunur ki, orta qiymətlə ətraf mühitin bütün mümkün θ temperaturlarına və bütün mümkün φ başlanğıc temperaturlarına əsasən prosesin son zaman anında çubuqda arzuolunan temperatur paylanması verilmiş $U(x)$ funksiyasına görə ortakvadratik meylini təyin edən funksional minimum qiymət alsın:

$$\mathcal{J}(\vartheta) = \int_{\Theta} \int_{\Phi} I(\vartheta; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi)\, \rho_{\Theta}(\theta)\, d\varphi\, d\theta, \tag{2.7}$$

$$I(\vartheta; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x)[u(x, T; \vartheta, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|\vartheta(t) - \vartheta^0\|^2_{L_2[0,T]}\,. \tag{2.8}$$

Burada $u(x, T; \vartheta, \varphi, \theta)$ – mümkün $u(x, 0) = \varphi$ başlanğıc şərtləri və ətraf mühitin θ temperaturlarına uyğun həlləridir; ε, ϑ^0 – funksionalın requlyarlaşma parametrləridir; $\mu(x) \geq 0$ – verilmiş çəki funksiyasıdır.

Əgər başlanğıc şərtlər çoxluğu Φ və ətraf mühitin temperatur qiymətləri Θ sonlu olarsa, onda (2.8) əvəzinə aşağıdakı funksional istifadə olunacaq:

$$\mathcal{J}(\vartheta, T) = \sum_{i=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_\theta} I(\vartheta; \varphi_i, \theta_j) p_i^{\varphi} p_j^{\theta}\,.$$

Tutaq ki, qızdırılma prosesində çubuğun L_x sayda $\xi_1, \dots, \xi_{L_x} \in [0, l]$ nöqtəsində zamana görə kəsilməz olaraq

$$u_i(t) = u(\xi_i, t), i = 1, \dots, L_x, \tag{2.9}$$

və yaxud da $L_t + 1$ sayda τ_s diskret zaman anlarında temperaturun ölçülməsi aparılır

$$u_{is} = u(\xi_i, \tau_s), i = 1, \dots, L_x, s = 0, \dots, L_t, \tau_0 = 0. \tag{2.10}$$

İdarəetmə prosesində $\vartheta(t)$ sərhəd idarəsinin qiymətini prosesin cari vəziyyətinə əsasən ölçmə nöqtələrindən alınan nəticələrin xətti əks əlaqəsi şəklində təyin edəcəyik. (2.9) kəsilməz əks əlaqə halında idarəetmə aşağıdakı düsturla təyin olunur [7]:

$$\vartheta(t, y) = \sum_{i=1}^{L_x} k_i [u(\xi_i, t) - z_i]\,, t \in [0, T], \tag{2.11}$$

harada z_i – i-ci ölçmə nöqtəsində nominal temperaturdur, hansı ki, bu nöqtədə cari vəziyyətdən uzaqlaşma idarəetmənin qiymətinə təsir edir; k_i – gücləndirmə əmsalıdır, $i = 1, \dots, L_x$. (2.11) düsturunda və daha sonra aşağıdakı işarələmə istifadə olunmuşdur:

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{L_x}), k = (k_1, \dots, k_{L_x}), z = (z_1, \dots, z_{L_x}), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_{L_t}), y = (k, z).$$

Məlumdur ki, (2.11) idarə funksiyası $t \in [0,T]$ zamana görə kəsilməzdir.

(2.11) düsturunu (2.2) sərhəd şərtində yerinə yazsaq

$$u'_x(0,t) = \lambda_1 \left[u(0,t) - \sum_{i=1}^{L_x} k_i [u(\xi_i, t) - z_i] \right], t \in [0,T], \tag{2.12}$$

ayrılmamış aralıq şərtlərlə qeyri-lokal sərhəd şərtini almış olacağıq.

Müşahidə anlarının (2.10) diskret halı üçün ξ_i, $i = 1, \dots, L_x$, yoxlama nöqtələrinin vəziyyətinə görə əks əlaqə ilə sərhəd idarəetmə təsirləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\vartheta(t,y) = \sum_{i=1}^{L_x} k_i [u(\xi_i, \tau_s) - z_i] \, , t \in (\tau_s, \tau_{s+1}], s = 0, \dots, L_t, \tau_{L_t+1} = T. \tag{2.13}$$

Bu halda sintez olunan idarəetmə hissə-hissə sabit funksiyadır, onun parametrləri k_i, z_i, ξ_i, $i = 1, \dots, L_x$ isə (2.11) düsturunda olduğu mənanı ifadə edir. (2.2) sərhəd şərti (2.13) idarəetməsində aşağıdakı kimi olur:

$$u'_x(0,t) = \lambda_1 \left[u(0,t) - \sum_{i=1}^{L_x} k_i [u(\xi_i, \tau_s) - z_i] \right], t \in (\tau_s, \tau_{s+1}], s = 0, \dots, L_t. \tag{2.14}$$

$\tau_s, s = 1, \dots, L_t$, diskret zamana anları əvvəlcədən verilmişlər.

Sərhəd şərti (2.14) şəklində olan, baxılan başlanğıc-sərhəd məsələsinin $u(x,t)$ həlli $x \in (0,l)$ nöqtələrinə görə iki dəfə və $t = \tau_s$, $s = 1, \dots, L_t$, nöqtələrindən başqa t zaman anlarına görə bir dəfə diferensiallanandır.

Bu halda (2.1) prosesinin riyazi təsvirini

$$u'_t(x,t) = a^2 u''_{xx}(x,t) - \lambda_0 [u(x,t) - \theta], \tag{2.15}$$
$$x \in (0,l), t \in (\tau_s, \tau_{s+1}], s = 0, \dots, L_t,$$

τ_s zaman anlarında aşağıdakı şərtlərlə tamamlamaq olar:

$$u(x, \tau_s) = u(x, \tau_s^-) = u(x, \tau_s^+), s = 1, \dots, L_t, \tag{2.16}$$

harda

$$\tau_s^- = \tau_s - 0, \;\; \tau_s^+ = \tau_s + 0.$$

Qızdırılma prosesinin (2.9) zamana görə kəsilməz müşahidələr halında (2.7),(2.8) funksionallarını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\mathcal{J}(y) = \int_{\Theta} \int_{\Phi} I(y; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) \, \rho_{\Theta}(\theta) d\varphi \, d\theta, \tag{2.17}$$

$$I(y; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x) [u(x,T; y, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|y - y^0\|^2_{R^{2L_x}}. \tag{2.18}$$

Burada $u(x,T; y, \varphi, \theta)$ – verilmiş ixtiyari $y = (k,z)$ əks əlaqə parametrlərinə, $\varphi = \varphi(x)$ başlanğıc şərtinə və ətraf mühitin θ temperaturuna uyğun (2.1), (2.12), (2.3), (2.5) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir; ε>0, $y^0 \in R^{2L_x}$ – funksionalın requlyarlaşma parametrləridir.

(2.12) və (2.14) düsturlarından məlumdur ki, $\vartheta(t,y)$ idarəetməsi sintez olunan parametrlərdən xətti asılıdır. Ardıcıl olaraq, (2.17) funksionalı eyni ilə optimallaşdırılan parametrlərdən mürəkkəb şəkildə asılıdır və onun qabarıq olmasını təyin etmək üçün hər hansı tədqiqatın aparılması mümkün deyildir. Buradan isə sintez olunan parametrlər fəzasında funksionalın çox ektremumlu olmasını təxmin edə bilərik.

Aydındır ki, $\vartheta(t)$ idarəetmə təsirinə qoyulan (2.4) məhdudiyyəti kəsilməz müşahidələr halında əks əlaqə ilə sintez olunan idarəetmə parametrlərinə qoyulan aşağıdakı məhdudiyyətlərlə əvəz olunur:

$$g(t,y) = d_1 - \left|\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right| \geq 0, \tag{2.19}$$

$$\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y) = d_0 - \sum_{i=1}^{L_x} k_i[u(\xi_i,t) - z_i]\,, t \in [0,T],$$

diskret müşahidələr halında isə (2.19) əvəzinə aşağıdakı məhdudiyyət şərti ödənməlidir:

$$g(\tau_s,y) = d_1 - \left|\tilde{\vartheta}_{d_0}(\tau_s;y)\right| \geq 0, s = 0,\dots,L_t.$$

Beləliklə, dəqiq başlanğıc şərt və dəqiq ətraf mühitin temperaturu məlum olmadıqda çubuğun qızdırılma (temperaturun requlyarlaşması) prosesini təsvir edən başlanğıc-sərhəd məsələsində sərhəd idarəetmənin sintezi (əks əlaqə ilə) (2.1), (2.3), (2.5), (2.12), (2.17)-(2.19) məsələsinə gətirilir. Alınmış məsələni paylanmış parametrli sistemlərdə optimal idarəetmənin parametrik məsələlər sinfinə aid etmək olar [8, 9, 10]. Onun əsas xüsusiyyətləri: 1) məsələdə optimallaşdırılan parametrlərin qeyri-xətti iştirak etməsi idarəetmə məsələsinin qabarıq olmamasını, ardıcıl olaraq, funksionalın çoxekstremumlu olmasını göstərir; 2) sərhəd şərtlərində çubuğun daxili nöqtələrindəki vəziyyətlərinin ayrılmamış şəkildə iştirakı verilmiş idarəetmə parametrlərinə görə müvafiq sərhəd məsələsinin həllində əlavə çətinliklər yaradır.

3. Ədədi həll üçün düsturların alınması. Cərimə funksiyasının minimallaşdırılması məsələsində sonlu $y \in R^{2L}$ idarəetmə parametrləri vektorunun sintezi məsələsinin həlli üçün (2.19) məhdudiyyət şərtini nəzərə alaraq cərimə funksiyaları üsulundan istifadə edəcəyik. Konkretlik üçün xarici cərimə funksiyası üsulu istifadə olunacaq, bu halda minimallaşdırılan (2.18) funksionalı əvəzinə aşağıdakı funksional olacaqdır:

$$\tilde{I}(y;\varphi,\theta) = I(y;\varphi,\theta) + rI_{\text{crm}}(y), \tag{3.1}$$

$$I_{\text{crm}}(y) = \int_0^T \{\min(0, g(t,y))\}^2\, dt,$$

harada r – cərimə əmsalıdır, və $r \to +\infty$ [9].

Bu, verilmiş cərimə əmsalının qiymətinə uyğun minimallaşdırılan $\mathcal{I}(y)$ funksionalının ardıcıl iterasiyalar ardıcıllığını qurmağa imkan verir.

$$y^{n+1} = y^n - \alpha_n \operatorname{grad} \mathcal{I}(y^n)\,,\ \ n = 0,1,\dots \tag{3.2}$$

(3.2) düsturunda aşağıdakı işarələmə istifadə olunub. (2.17) məqsəd funksiyasının $2L_x$ – ölçülü qradiyent vektoru:

$$\operatorname{grad} \mathcal{I}(y) = \left(\frac{\partial \mathcal{I}(y)}{\partial k}, \frac{\partial \mathcal{I}(y)}{\partial z}\right). \tag{3.3}$$

$\alpha_n \geq 0$ – antiqradiyentin hər hansı məlum üsullarla, xüsusi halda birölçülü minimallaşma üsulları ilə təyin olunan addımıdır ki, iterasiya üsulunun monotonluğunu təmin edir [9]:

$$\mathcal{I}(y^{n+1}) \leq \mathcal{I}(y^n),\ \ n = 0,1,\dots. \tag{3.4}$$

Daha sonra isə, arqumentin artım üsulunu tətbiq edərək, [1,4,9] $\mathcal{I}(y)$ funksionalının (3.3) qradiyentinin komponentləri üçün düsturları alacağıq.

Həm (2.5) çoxluğundan olan prosesin bütün başlanğıc vəziyyətlərinin, həm də (2.6) çoxluğundan olan ətraf mühitin bütün temperaturlarının bir-birindən asılı olmadığını nəzərə alsaq, onların hər birini konkret bir çubuğun qızdırılma prosesinin idarəedilməsində istifadə edildiyini deyə bilərik. Onda (2.17) funksionalı üçün aşağıdakı ifadə doğrudur.

$$\operatorname{grad}_y \mathcal{I}(y) = \int_\Theta \int_\Phi \operatorname{grad}_y I(y,\varphi,\theta)\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)d\varphi\, d\theta. \tag{3.5}$$

(3.5) düsturundan istifadə edərək, (3.1) funksionalının qradiyent vektorunun komponentlərini ixtiyari, lakin konkret verilmiş başlanğıc $\varphi(x)$ şərtinə və θ ətraf mühit temperaturuna uyğun düsturları tapaq.

Fərz edək ki, $u = u(x,t;y)$ baxılan başlanğıc-sərhəd məsələsinin verilmiş mümkün $y = (k,z)$ idarəetmə parametrlərinə uyğun həlli, $\tilde{u} = u(x,t;\tilde{y})$ isə bu məsələnin mümkün idarəetmə parametrlərinin kifayət qədər kiçik Δy artımı aldıqda həllidir:

$$\Delta y = (\Delta k, \Delta z),$$
$$\tilde{y} = y + \Delta y = (k + \Delta k, z + \Delta z),$$
$$\Delta u = \Delta u(x,t;y) = \tilde{u}(x,t;\tilde{y}) - u(x,t;y).$$

Göründüyü kimi, $\Delta u(x,t;y)$ ikinci tərtibdən kiçik dəqiqliklə aşağıdakı başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\Delta u'_t(x,t) = a^2 \Delta u''_{xx}(x,t) - \lambda_0 \Delta u(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{3.6}$$
$$\Delta u(x,0) = 0, x \in [0,l], \tag{3.7}$$
$$\Delta u'_x(0,t) = \lambda_1 \left(\Delta u(0,t) - \sum_{i=1}^{L_x} [u(\xi_i,t) - z_i] \Delta k_i + \sum_{i=1}^{L_x} k_i \Delta z_i - \sum_{i=1}^{L_x} k_i \Delta u(\xi_i,t) + \mathbb{O}_1 \right), \tag{3.8}$$
$$t \in [0,T],$$
$$\Delta u'_x(l,t) = -\lambda_2 \Delta u(l,t), t \in [0,T], \tag{3.9}$$
$$\mathbb{O}_1 = \mathbb{O}_1(\|\Delta y\|, \|\Delta u\|) = \sum_{i=1}^{L_x} (\Delta u(\xi_i,t)\Delta k_i - \Delta z_i \Delta k_i).$$

Məlumdur ki, (3.6)-(3.9) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həlli onda iştirak edən parametr və funksiyalardan kəsilməz olaraq asılıdır və (2.1), (2.2), (2.12), (2.5) başlanğıc-sərhəd məsələsinin Δy parametrlərinin kifayət qədər kiçik artımına görə aldığı artımın qiymətləndirilməsi lazımdır, hansı ki, aşağıdakı ümumi halda yaza bilərik [9]:

$$\|\Delta u(x,t)\|_{L_2[\Omega]} \leq c \|\Delta y\|_{R^{2L_x}},$$

$c > 0$ – sabitdir, Δy artımından asılı deyildir.

Bu halda (3.1) funksionalı parametrlərin Δy artımına nəzərən birinci tərtibdən kiçik dəqiqliklə artımını alacaq və uyğun olaraq başlanğıc-sərhəd məsələsinin artımını aşağıdakı kimi yazacağıq:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}(y) &= \Delta I(y;\varphi,\theta) + r\Delta I_{\text{crm}}(y) \\ &= I(y+\Delta y;\varphi,\theta) - I(y;\varphi,\theta) + r\big(\Delta I_{\text{crm}}(y+\Delta y) - \Delta I_{\text{crm}}(y)\big) + \mathbb{O}_2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\Delta I(y;\varphi,\theta) = 2\int_0^l \mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big)\Delta u(x,T;y)\,dx + 2\varepsilon(y - y^0)^* \Delta y,$$

$$\Delta I_{\text{crm}}(y) = 2\int_0^T \operatorname{sgn}\left(\vartheta_{d_0}(t,y)\right) \min\big(0, g(t,y)\big) \sum_{i=1}^{L_x} \big(\Delta k_i [u(\xi_i,t) - z_i] - k_i \Delta z_i + k_i \Delta u(\xi_i,t)\big)\,dt,$$

$$\mathbb{O}_2 = \mathbb{O}_2(\|\Delta u(x,T)\|, \|\Delta y\|) = o\big(\|\Delta u(x,T)\|_{L_2[0,l]}\big) + o(\|\Delta y\|_{R^{2L_x}}).$$

"*" işarəsi transponirə edilməsi əməliyyatıdır.

(3.6) tənliyinin bütün hədlərini sol tərəfə keçirib, alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini hələ ki, naməlum olan $t \in [0,T]$ görə kəsilməz-diferensiallanan, $x \in [0,l]$ görə $x = \xi_i$ nöqtələrindən başqa bütün nöqtələrdə iki dəfə kəsilməz-diferensiallanan, haradakı bu nöqtələrdə onun x-a görə birinci tərtib törəmələri sonlu kəsilməyə malik funksiyalar sinfindən olan ixtiyari $\psi(x,t) = \psi(x,t;y) = \psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ funksiyasına vuraq. Alınmış bərabərliyin sıfıra bərabər sol tərəfini $x \in [0,l]$ və $t \in [0,T]$ görə inteqrallasaq və (3.10) düsturu ilə toplasaq və (3.7)-(3.9) şərtlərini nəzərə alsaq onda alarıq:

$$\Delta\tilde{I}(y) = 2\int_0^l \mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big)\Delta u(x,T;y)\,dx$$
$$+ 2r\int_0^T \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min(0, g(t,y))\sum_{i=1}^{L_x}\big(\Delta k_i[u(\xi_i,t) - z_i] - k_i\Delta z_i + k_i\Delta u(\xi_i,t)\big)\,dt \tag{3.11}$$
$$+ \int_0^T\int_0^l \psi(x,t)\big(\Delta u_t'(x,t) - a^2\Delta u_{xx}''(x,t) + \lambda_0\Delta u(x,t)\big)\,dx\,dt + 2\varepsilon(y - y^0)^*\Delta y + \mathbb{O}_2.$$

İfadənin üçüncü həddini əvvəlcədən x dəyişəninə görə $(0,l)$ intervalında (ξ_i,ξ_{i+1}), $i = 0,\dots,L_x$, $\xi_0 = 0$, $\xi_{L_x+1} = l$ intervallarına ayırıb x və t dəyişənlərinə görə inteqrallasaq:

$$\Delta\tilde{I}(y) = 2\int_0^l \mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big)\Delta u(x,T;y)\,dx + 2\varepsilon(y - y^0)^*\Delta y$$
$$+ 2r\int_0^T \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min\big(0, g(t,y)\big)\sum_{i=1}^{L_x}\big(\Delta k_i[u(\xi_i,t) - z_i] - k_i\Delta z_i + k_i\Delta u(\xi_i,t)\big)\,dt$$
$$+ \int_0^l \psi(x,T)\Delta u(x,T)dx - \int_0^l\int_0^T \psi_t'(x,t)\Delta u(x,t)\,dt\,dx + a^2\int_0^T\big(\psi_x'(l,t) + \lambda_2\psi(l,t)\big)\Delta u(l,t)\,dt$$
$$- a^2\int_0^T\big(\psi_x'(0,t) - \lambda_1\psi(0,t)\big)\Delta u(0,t)\,dt - a^2\lambda_1\int_0^T\psi(0,t)\sum_{i=1}^{L_x}(\Delta k_i[u(\xi_i,t) - z_i] - k_i\Delta z_i)\,dt$$
$$+ a^2\sum_{i=1}^{L_x}\int_0^T\big(\psi(\xi_i^+,t) - \psi(\xi_i^-,t)\big)\Delta u_x'(\xi_i,t) - (\psi_x'(\xi_i^+,t) - \psi_x'(\xi_i^-,t) + \lambda_1\psi(0,t)k_i)\Delta u(\xi_i,t)\,dt$$
$$- a^2\sum_{i=0}^{L_x}\int_0^T\int_{\xi_i^+}^{\xi_{i+1}^-}\psi_{xx}''(x,t)\Delta u(x,t)\,dx\,dt + \lambda_0\int_0^T\int_0^l\psi(x,t)\Delta u(x,t)\,dx\,dt.$$

Belə ki, $\psi(x,t) = \psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ funksiyasının qiymətinə heç bir məhdudiyyət qoyulmadığı üçün, tələb edə bilərik ki, o, bütün $x \in (\xi_i,\xi_{i+1})$, $i = 0,\dots,L_x$, intervallarında aşağıdakı başlanğıc sərhəd məsələsinin həlli olsun

$$\psi_t'(x,t) = -a^2\psi_{xx}''(x,t) + \lambda_0\psi(x,t), x \in (\xi_i,\xi_{i+1}), i = 0,\dots,L_x, t \in [0,T], \tag{3.12}$$
$$\psi(x,T) = -2\mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big), x \in [0,l], \tag{3.13}$$
$$\psi_x'(0,t) = \lambda_1\psi(0,t), t \in [0,T], \tag{3.14}$$
$$\psi_x'(l,t) = -\lambda_2\psi(l,t), t \in [0,T], \tag{3.15}$$

amma $\xi_i \in (0,l)$, $i = 1,\dots,L_x$ müşahidə nöqtələrində aşağıdakı şərtlər ödənilsin

$$\psi_x'(\xi_i^+,t) = \psi_x'(\xi_i^-,t) - \lambda_1\psi(0,t)k_i + \frac{2k_ir}{a^2}\operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min(0, g(t,y)),\quad i = 1,\dots,L_x, \tag{3.16}$$
$$\psi(\xi_i^+,t) = \psi(\xi_i^-,t),\quad i = 1,\dots,L_x. \tag{3.17}$$

Göstərmək olar ki, əgər hər hansı ixtiyari $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında $x^0 \in [a,b]$ nöqtəsindən başqa bütün nöqtələrdə diferensiallanandırsa və $x^0 \in [a,b]$ nöqtəsində sonlu kəsilməyə malikdirsə:

$$f(x^0 + 0) - f(x^0 - 0) = A,$$

onda

$$\int_a^{x^0} f_x'(x)\,dx + \int_{x^0}^{b} f_x'(x)\,dx = \int_a^b [f_x'(x) + A\delta(x - x^0)]\,dx.$$

Əgər, (3.12) tənliyində (3.16) şərtini Dirakın δ-funksiyasından istifadə etməklə nəzərə alsaq, onda bu tənliyə çubuğun bütün uzunluğu boyunca baxa bilərik və aşağıdakı kimi yaza bilərik,

$$\psi_t'(x,t) = -a^2\psi_{xx}''(x,t) + \lambda_0\psi(x,t) - a^2\lambda_1\psi(0,t)\sum_{i=1}^{L_x} k_i\delta(x-\xi_i)$$
$$+ 2r\,\mathrm{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min(0, g(t,y))\sum_{i=1}^{L_x} k_i\delta(x-\xi_i),\quad (x,t)\in\Omega.$$

(3.1) funksionalının (3.3) qradiyent vektorunun komponentləri kimi, funksionalın artımında uyğun parametrlərin artımına uyğun olan xətti hissəsini götürsək aşağıdakı düsturları almış olarıq

$$\frac{\partial I(y;\varphi,\theta)}{\partial k_i} = -\lambda_1 a^2\int_0^T \psi(0,t)(u(\xi_i,t) - z_i)dt + 2\varepsilon(k_i - k_i^0)$$
$$+ 2r\int_0^T (u(\xi_i,t) - z_i)\,\mathrm{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min(0, g(t,y))\,dt\,, i = 1,\dots,L_x, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial I(y;\varphi,\theta)}{\partial z_i} = \lambda_1 a^2\int_0^T \psi(0,t)k_i dt + 2\varepsilon(z_i - z_i^0)$$
$$- 2r\int_0^T k_i\,\mathrm{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min(0, g(t,y))\,dt\,, i = 1,\dots,L_x. \tag{3.19}$$

Nəhayət, (3.5) asılılığından istifadə edərək, (2.17) funksionalının optimallaşdırılan parametrlərinə görə (3.3) qradiyentinin komponentləri üçün aşağıdakı düsturları alarıq:

$$\frac{\partial J(y)}{\partial k_i} = \int_\Theta\int_\Phi\int_0^T \left(-\lambda_1 a^2\psi(0,t)(u(\xi_i,t) - z_i) + 2\varepsilon(k_i - k_i^0)\right)\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)dt\,d\varphi\,d\theta$$
$$+ 2r\int_\Theta\int_\Phi\int_0^T (u(\xi_i,t) - z_i)\,\mathrm{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min\big(0, g(t,y)\big)\,\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)dt\,d\varphi\,d\theta\,, \tag{3.20}$$
$$i = 1,\dots,L_x,$$

$$\frac{\partial J(y)}{\partial z_i} = \int_\Theta\int_\Phi\int_0^T \left(\lambda_1 a^2\psi(0,t)k_i + 2\varepsilon(z_i - z_i^0)\right)\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)dt\,d\varphi\,d\theta$$
$$- 2k_i r\int_\Theta\int_\Phi\int_0^T \mathrm{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t,y)\right)\min\big(0, g(t,y)\big)\,\rho_\Phi(\varphi)\rho_\Theta(\theta)dt\,d\varphi\,d\theta\,, i = 1,\dots,L_x, \tag{3.21}$$

Çubuğun qızdırılması prosesində idarəetmənin (2.15)-(2.16) şəklində zamana görə diskret olan əks əlaqəli və ona uyğun (2.13) hissə-hissə kəsilməz idarəetmə təsirlərinin sintezi məsələsinə nəzərən mühakiməni analoji olaraq apara bilərik. Bu halda (3.11) düsturunun üçüncü toplananı hissə-hissə inteqrallamazdan əvvəl x dəyişəninə görə $(0,l)$ intervalını (ξ_i,ξ_{i+1}), $i = 0,\dots,L_x$ intervallarına, t dəyişəninə görə isə $[0,T]$ parçasını (τ_s,τ_{s+1}), $s = 0,\dots,L_t$ intervallarına bölmək lazımdır. Nəticədə ixtiyari seçilmiş mümkün $\varphi(x)\in\Phi$ başlanğıc şərti və $\theta\in\Theta$ ətraf mühitin temperaturu üçün sintez olunan $y \in R^{2L_x}$ parametrləri və τ_s, $s = 1, \dots, L_t$ zaman anlarına görə $\tilde{I}(y)$ funksionalının qradiyentləri üçün düsturları almış olarıq:

$$\frac{\partial I(y;\varphi,\theta)}{\partial k_i} = -\lambda_1 a^2 \sum_{s=0}^{L_t} \int_{\tau_s^+}^{\tau_{s+1}^-} \psi(0,t)(u(\xi_i,\tau_s) - z_i)dt + 2\varepsilon(k_i - k_i^0)$$
$$+ 2r \sum_{s=0}^{L_t} (u(\xi_i,\tau_s) - z_i) \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(\tau_s, y)\right) \min\big(0, g(\tau_s, y)\big), i = 1, \dots, L_x, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial I(y;\varphi,\theta)}{\partial z_i} = \lambda_1 a^2 \sum_{s=0}^{L_t} \int_{\tau_s^+}^{\tau_{s+1}^-} \psi(0,t) k_i dt + 2\varepsilon(z_i - z_i^0)$$
$$- 2r \sum_{s=0}^{L_t} k_i \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(\tau_s, y)\right) \min(0, g(\tau_s, y)), i = 1, \dots, L_x, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial I(y;\varphi,\theta)}{\partial \tau_s} = -\lambda_1 a^2 \int_{\tau_s^+}^{\tau_{s+1}^-} \psi(0,t) \sum_{i=1}^{L_x} k_i u_t'(\xi_i,\tau_s)\, dt + 2\varepsilon(\tau_s - \tau_s^0)$$
$$+ 2r \sum_{i=1}^{L_x} k_i u_t'(\xi_i,\tau_s) \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(\tau_s, y)\right) \min\big(0, g(\tau_s, y)\big), s = 1, \dots, L_t. \tag{3.24}$$

(3.22)-(3.24) düsturlarında $\psi(x,t) = \psi(x,t;y,\varphi,\theta)$ aşağıdakı qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\psi_t'(x,t) = -a^2 \psi_{xx}''(x,t) + \lambda_0 \psi(x,t) - a^2 \lambda_1 \psi(0,t) \sum_{i=1}^{L_x} k_i \delta(x - \xi_i, t - \tau_s)$$
$$+ 2r \operatorname{sgn}\left(\tilde{\vartheta}_{d_0}(t, y)\right) \min(0, g(t, y)) \sum_{i=1}^{L_x} k_i \delta(x - \xi_i, t - \tau_s), (x,t) \in \Omega, \tag{3.25}$$

$$\psi(x,T) = -2\mu(x)\big(u(x,T) - U(x)\big), \ \ x \in [0,l], \tag{3.26}$$
$$\psi_x'(0,t) = \lambda_1 \psi(0,t), \ \ t \in [0,T], \tag{3.27}$$
$$\psi_x'(l,t) = -\lambda_2 \psi(l,t), \ \ t \in [0,T]. \tag{3.28}$$

Burada $\delta(x,t)$ elə ikiölçülü ümumiləşmiş funksiyadır ki,

$$\int_0^l \int_0^T \delta(x,t)\, dt\, dx = 1,$$

$x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$ görə ixtiyari inteqrallanan $f(x,t)$ funksiyası üçün bütün $\xi \in [0,l]$, $\tau \in [0,T]$ qiymətlərində aşağıdakı şərt ödənilir

$$\int_0^l \int_0^T f(x,t) \delta(x - \xi, t - \tau)\, dt\, dx = f(\xi,\tau).$$

(3.25)-(3.28) qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsinin həlli göstərilən şərtləri ödəyir: 1) t zaman dəyişəninə görə $t \in (\tau_s, \tau_{s+1})$ kəsilməz-diferensiallanan, x məkan dəyişəninə görə $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ isə iki dəfə kəsilməz-diferensiallanandır; 2) $t = \tau_s$ zaman anlarında $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ intervalında x görə kəsilməzdir; 3) $x \in \xi_i$ nöqtələrində t görə kəsilməzdir, amma onun x görə birinci tərtib törəməsi $\psi_x'(\xi_i, t)$ sonlu kəsilməyə malikdir; 4) (ξ_i, τ_s) nöqtələrinin özləri isə x görə kəsilməz və t görə kəsilmə nöqtələridir.

4. Məsələnin ədədi həll sxemi. Yuxarıda aldığımız düsturların tətbiqi ilə, (3.2) iterasiya prosedurundan istifadə edərək $\{y^n\}, n = 0, 1, \ldots$ minimallaşdırma ardıcıllığını qurmaq üçün y idarəetmə parametrlərinin sintezi məsələsinin ədədi həlli sxemini göstərək.

Konkretlik üçün prosesin kəsilməz müşahidələrlə olan halında idarəetmə parametrlərinin sintezi məsələsinə baxaq.

Əvvəlcə, əgər mümkün başlanğıc qiymətlər çoxluğu Φ və/yaxud ətraf mühitin temperatur çoxluğu Θ kəsilməzdirsə, onda onlar hər hansı diskretləşdirmə addımı ilə sonlu çoxluqlar ilə əvəzlənir. Diskret çoxluğun hər bir elementinə uyğun onların ehtimalı təyin olunur. Məsələn, əgər $\Phi = \left[\underline{\varphi}, \overline{\varphi}\right]$ olarsa, onda $\widetilde{\Phi}$ şəbəkəsinin qiymətlər çoxluğu daxil edilir ki, $\varphi(x) = \varphi_i = \underline{\varphi} + i\Delta\varphi$, $x \in [0, l]$, $i = 0, \ldots, N_\varphi$, $\Delta\varphi = \left(\overline{\varphi} - \underline{\varphi}\right)/N_\varphi$, burada misal üçün, ehtimalın qiymətlərini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$P(\varphi = \varphi_i) = \int_{\varphi_i - \Delta\varphi/2}^{\varphi_i + \Delta\varphi/2} \rho_\Phi(\varphi) d\varphi, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Məlumdur ki, müntəzəm paylanma halında $\rho_\Phi(\varphi)$ üçün aşağıdakı ifadə doğru olar

$$P(\varphi = \varphi_i) = \frac{1}{N_\varphi}, \quad i = 0, \ldots, N_\varphi.$$

Analoji olaraq (2.6), yəni kəsilməz Θ çoxluğuna tətbiq edə bilərik.

Birinci mərhələdə (3.2) prosedurunun hər bir n-ci iterasiyasında funksionalın qradiyentini təyin etmək üçün optimallaşdırılan parametrlərin cari y^n qiymətləri üçün və bir (2.5) başlanğıc şərtinə və bir (2.6) ətraf mühit temperaturuna görə (2.1), (2.12), (2.3) başlanğıc-sərhəd məsələsi həll olunur [11, 12]. İkinci mərhələdə isə (3.12)-(3.17) qoşma başlanğıc-sərhəd məsələsi həll edilir.

Üçüncü mərhələdə verilmiş diskret başlanğıc φ_i qiymətlərində və θ_j ətraf mühitin temperaturuna uyğun $I\left(y; \varphi_i, \theta_j\right)$ (2.18) funksionalının (3.18)-(3.19) qradiyent vektorunun komponentləri təyin edilir. Bütün bu üç mərhələ $\varphi_i \in \widetilde{\Phi},\ \theta_j \in \widetilde{\Theta},\ i = 1, \ldots, N_\varphi,\ j = 1, \ldots, N_\theta$ qiymətlər üçün təkrarlanır, daha sonra Φ və Θ çoxluqlarına görə inteqrallama $\widetilde{\Phi}$ və $\widetilde{\Theta}$ diskret çoxluqlarının kvadratur formulları ilə əvəzlənərək axtarılan (3.20)-(3.21) qradiyent vektorlarının komponentləri hesablanır.

Daha sonra, (3.4) şərtini ödəməklə (3.2) düsturuna əsasən antiqradiyent istiqamətində α_n addımı atılır və sintez olunan idarəetmə parametrlər vektorunun yeni y^{n+1} qiymətləri təyin edilir. Əgər (3.2) prosedurunun verilmiş hər hansı bir dayanma meyarı ödənməzsə, onda yeni iterasiyada yuxarıda göstərilmiş dörd mərhələ təkrarlanır.

5. Nəticə. Çubuğun uclarının birindən qızdırılma prosesi misalı üzərində xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunmuş paylanmış parametrli obyektlərin sərhəd idarəetmə sistemləri üçün idarəetmənin sintezi məsələsi tədqiq edilmişdir. Qoyulmuş məsələ paylanmış parametrli sistemlərin parametrik optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilir.

Effektiv ədədi optimallaşma üsullarının tətbiqi ilə prosesin vəziyyətindən asılı olan idarəetmə parametrlərinin təyini üçün məqsəd funksionalının qradiyentinin komponentləri üçün düsturlar alınmışdır.

Baxılan məsələnin qoyuluşu və onun həllinə yanaşma üsulunu asanlıqla digər xüsusi törəməli diferensial tənliklər və başlanğıc-sərhəd şərtləri ilə təsvir olunmuş müxtəlif təkamül (texnoloji, ekoloji, iqtisadi və s.) proseslərinə aid etmək olar.

Ədəbiyyat

1. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
2. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
5. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Acad. Publ., 2005.
6. Айда-заде К.Р. Подход к синтезу сосредоточенных управлений в распределенных системах // Автоматика и вычислит. техника. 2005, № 3, с.16–22.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
8. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 2012, № 9, с.3–19.Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
10. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
11. Айда-заде К.Р. О численном решении систем дифференциальных уравнений с нелокальными условиями // Вычислит. технологии. Новосибирск. 2004, Т. 9, № 1, с.11–25.
12. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. матем. и математ. физики. 2004, Т. 44, № 9, с.1585–1595.

V.A. Hashimov

On one problem of synthesis of boundary control of the rod heating process

On the example of boundary control of the rod heating process, the problem of synthesis of control actions in systems with distributed parameters is studied. Feedback is provided by measuring the state of the process at internal points, the values of which are used to form the control. To solve the problem, necessary formulas are obtained for the application of effective numerical methods of optimization of the first order.

Keywords: control synthesis, measuring point, nonlocal condition, gradient projection method

УДК 519.622

В.А. Гашимов

Об одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня

На примере граничного управления процессом нагрева стержня исследуется задача синтеза управляющих воздействий в системах с распределенными параметрами. Обратная связь осуществляется за счет замеров состояния процесса во внутренних точках, значения которых используются для формирования управления. Для решения задачи получены необходимые формулы для применения эффективных численных методов оптимизации первого порядка.

Ключевые слова: синтез управления, точка замера, нелокальное условие, метод проекции градиента

AMEA-nın İdarəetmə Sistemləri İnstitutu

Təqdim olunub 12.05.2017