Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.6, 2017
www.icp.az/2017/6-12.pdf

УДК 519. 217

А.М. ГАСАНОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ И ДИСПЕРСИИ МОМЕНТА ПЕРВОГО КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА КОМПРЕССОРНОГО УСТРОЙСТВА

Вероятностно-статистическим методом находится явный вид преобразования Лапласа распределения момента первого капитального ремонта компрессорного устройства и, в частности, его математическое ожидание и дисперсия. Полученный результат в данной статье позволяет исследовать модели, связанные со случайными блужданиями, построенные по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин, и применить их к некоторым задачам теории управления запасами, а также в нефтяной промышленности.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, вероятностное пространство, процесс с отрицательным сносом.

1. Введение. Нахождение распределения момента первого капитального ремонта устройства есть ничто иное, как нахождение распределения момента первого достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками и с запаздываниями. В теории случайных процессов нахождению этого распределения посвящено много работ [1-6] и т.д. В работах [1] найдено асимптотическое разложение распределения. В [2] найдено преобразование Лапласа распределения нижнего граничного функционала процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле. В [3] найдено математическое ожидание и дисперсия распределения первого момента пересечения нулевого экрана процессом полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками. В [4] находится длительность безотказной работы устройства и размер ресурса после текущего ремонта эрлангово-распределенными случайными величинами. В [5] найдено преобразование Лапласа распределения момента первого достижения экрана «0» процессом полумарковского блуждания с положительным сносом и отрицательными скачками.

В данной статье длительность безотказной работы устройства и размер ресурса после текущего ремонта предполагаются эрлангово распределенными случайными величинами третьего и второго порядка, соответственно. Пусть имеется компрессорное устройство, которое в начальный момент имеет ресурс объемом z. Компрессорное устройство работает и его ресурс постепенно уменьшается, после чего его отправляют на текущий ремонт. После приобретенного ресурса, он вновь начинает функционировать. Через некоторое время его ресурс снова уменьшается, и компрессорное устройство отправляется на следующий текущий ремонт и т.д. Наша цель найти математическое ожидание и дисперсию первого капитального ремонта.

2. Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ задана последовательность случайных величин $\{\xi_k, \eta_k, \zeta_k\}_{k\geq 1}$, где ξ_k, ζ_k, η_k – независимые между собою, положительные случайные величины ξ_k – длительность времени между последовательными текущими ремонтами компрессорного устройства, η_k – длительность текущего ремонта компрессорного устройства, ζ_k – приобретенный ресурс после -го текущего ремонта компрессорного устройства.

Исходя из заданных случайных величин, построим процесс полумарковского блуждания с запаздываниями.

$$X(t)=\begin{cases} z-t+\sum_{i=1}^{k-1}(\zeta_i+\eta_i)\,,\text{если } \sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i+\eta_i)\le t<\sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i+\eta_i)+\xi_k, \\ z-\sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i+\eta_i)\,,\text{если} \sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i+\eta_i)+\xi_k\le t<\sum_{i=1}^{k}(\xi_i+\eta_i)\ . \end{cases}$$

Этот процесс задержим экраном в нуле по методу А.А.Боровкова [6, с.41]. Его обозначим через $X^*(t)$, т.е.

$$X^*(t)=X(t)-\inf_{0\le s\le t}\big(0,X(s)\big).$$

Полученный процесс описывает уровень ресурса компрессорного устройства в момент времени *t*.

Вводим случайную величину

$$\tau_0=inf\{t\colon X(t)\le 0\}$$

τ_0 – момент первого пересечения уровня нуль или же момент первого капитального ремонта.

Наша цель – найти преобразование Лапласа распределения случайной величины $\tau_{0.}$

3. Обозначения.

$$L(\theta|z)=E\big(e^{-\theta\tau_0}|X(0)=z\big),\theta>0,$$
$$\theta>0$$
$$\varphi(\theta)=Ee^{-\theta\eta_1}.$$

4. Составление интегрального уравнения для $L(\theta|z)$.

Напишем стохастическое уравнение для случайной величины $\tau_{0.}$

$$\tau_0=\begin{cases} z, & \text{если } z-\xi_1<0, \\ \xi_1+\eta_1+T, & \text{если } z-\xi_1>0, \end{cases}$$

где T и τ_0 имеют одинаковые распределения.

По формуле полной вероятности имеем

$$L(\theta|z)=E\big(e^{-\theta\tau_0}|X(0)=z\big)=\int_{\Omega} e^{-\theta\tau_0}P(d\omega|z)=\int_{\{z-\xi_1<0\}} e^{-\theta z}\,P(d\omega)+\int_{\{z-\xi_1>0\}} e^{-\theta(\xi_1+\eta_1+T)}\,P(d\omega)$$

Сделаем следующие замены переменных $\xi_1=s,\eta_1=h,\zeta_1=y,T=x$. При этом предыдущее уравнение примет вид

$$L(\theta|z)=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}+\int_{s=0}^{z}\int_{h=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} e^{-\theta s}e^{-\theta h}e^{-\theta T}\,P\{\xi_1\in ds,\eta_1\in dh,T\in dx,\zeta_1\in dy\}=$$

$$=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}+\varphi(\theta)\int_{s=0}^{z} e^{-\theta s}\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x}\,P\{T\in dx|\xi_1=s,\zeta_1=y\}P\{\xi_1\in ds\}P\{\zeta_1\in dy\}=$$

$$=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}+\varphi(\theta)\int_{s=0}^{z} e^{-\theta s}\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x}\,P\{T\in dx|X(0)=z-s+y\}P\{\xi_1\in ds\}P\{\zeta_1\in dy\}.$$

Итак, получили интегральное уравнение

$$L(\theta|z)=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}$$
$$+\varphi(\theta)\int_{s=0}^{z} e^{-\theta s}\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x}P\{T\in dx|X(0)=z-s+y\}P\{\xi_1\in ds\}P\{\zeta_1\in dy\}.$$

Во втором члене, сделав замену переменных $\alpha=z-s+y$ получим,

$$L(\theta|z)=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}-\varphi(\theta)e^{-\theta z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\theta y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}e^{\theta\alpha}L(\theta|\alpha)d_\alpha P\{\xi_1<y+z-\alpha\}dP\{\zeta_1<y\}.$$

Если распределения ξ_1 и ζ_1 абсолютно-непрерывные, то вышенаписанное уравнение примет вид.

$$L(\theta|z)=e^{-\theta z}P\{\xi_1>z\}+\varphi(\theta)e^{-\theta z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\theta y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}e^{\theta\alpha}L(\theta|\alpha)P_{\xi_1}(y+z-\alpha)P_{\zeta_1}(y)d\alpha dy.$$

Это уравнение будем решать в частном случае в целях получения явного вида решения последнего уравнения.

5. Решение интегрального уравнения. Пусть

$$P\{\xi_1<t\}=\left[1-\left[1+\mu t+\frac{(\mu t)^2}{2!}\right]e^{-\mu t}\right]\varepsilon(t),$$
$$P\{\zeta_1<t\}=\left[1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t}\right]\varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$

Тогда плотности распределения случайных величин ξ_1и ζ_1 будут следующие, соответственно

$$P_{\xi_1}(y+z-\alpha)=\frac{\mu^3}{2}(y+z-\alpha)^2e^{-\mu(y+z-\alpha)}$$

и

$$P_{\zeta_1}(y)=\lambda^2ye^{-\lambda y}$$

При таких предположениях вышеуказанное интегральное уравнение примет вид

$$L(\theta|z)=e^{-(\mu+\theta)z}\left[1+\mu z+\frac{(\mu z)^2}{2}\right]+\varphi(\theta)e^{-\theta z}\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-\theta y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}e^{\theta\alpha}L(\theta|\alpha)\tfrac{\mu^3}{2}(y+z-\alpha)^2\times$$
$$\times e^{-\mu(y+z-\alpha)}\lambda^2ye^{-\lambda y}d\alpha dy.$$

После некоторых выкладок получим следующее интегральное уравнение:

$$L(\theta|z)=e^{-(\mu+\theta)z}\left[1+\mu z+\frac{(\mu z)^2}{2!}\right]+$$
$$+\frac{\lambda^2\mu^3}{2}\varphi(\theta)e^{-(\mu+\theta)z}\int\limits_{y=o}^{\infty}ye^{-(\lambda+\mu+\theta)y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}(y+z-\alpha)^2e^{(\mu+\theta)\alpha}L(\theta|\alpha)d\alpha dy. \qquad (5.1)$$

Обе части этого уравнения умножим на $e^{(\mu+\theta)z}$

$$e^{(\mu+\theta)z}L(\theta|z)=\left[1+\mu z+\frac{(\mu z)^2}{2!}\right]+\frac{\lambda^2\mu^3}{2}\varphi(\theta)\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-(\lambda+\mu+\theta)y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}e^{(\mu+\theta)\alpha}y(y+z-\alpha)^2L(\theta|\alpha)d\alpha dy.$$

Продифференцировав последнее выражение по z, получим

$$(\mu+\theta)e^{(\mu+\theta)\alpha}L(\theta|z)+e^{(\mu+\theta)z}L'(\theta|z)=\mu+\mu^2z+\frac{\lambda^2\mu^3}{2}2\varphi(\theta)\int\limits_{y=0}^{\infty}e^{-(\lambda+\mu+\theta)y}\times$$
$$\times\int\limits_{\alpha=y}^{y+z}e^{(\mu+\theta)^\alpha}y(y+z-\alpha)L(\theta|\alpha)d\alpha dy.$$

Вторая производная по z, этого равенства будет иметь следующий вид

$$(\mu+\theta)^2 e^{(\mu+\theta)z}L(\theta|z)+2(\mu+\theta)e^{(\mu+\theta)z}L'(\theta|z)+e^{(\mu+\theta)z}L''(\theta|z)=$$
$$=\mu^2+\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\int\limits_{y=0}^{\infty} ye^{-(\lambda+\mu+\theta)y}\left[\int\limits_{\alpha=y}^{y+z} e^{(\mu+\theta)\alpha}L(\theta|\alpha)d\alpha\right]dy,$$

т.е.,

$$e^{(\mu+\theta)z}\left[(\mu+\theta)^2L(\theta|z)+2(\mu+\theta)L'(\theta|z)+L''(\theta|z)\right]=$$
$$=\mu^2+\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\int\limits_{y=0}^{\infty} ye^{-(\lambda+\mu+\theta)y}\int\limits_{\alpha=y}^{y+z} e^{(\mu+\theta)\alpha}L(\theta|\alpha)d\alpha dy.$$

Третья производная по z, будет иметь вид

$$(\mu+\theta)^3L(\theta|z)+3(\mu+\theta)^2L'(\theta|z)+3(\mu+\theta)L''(\theta|z)+L'''(\theta|z)=$$
$$=\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\left(\int\limits_{u=z}^{\infty} e^{-\lambda u}(u-z)L(\theta|u)du\right)e^{\lambda z},$$

т.е.

$$[(\mu+\theta)^3L(\theta|z)+3(\mu+\theta)^2L'(\theta|z)+3(\mu+\theta)L''(\theta|z)+L'''(\theta|z)]e^{-\lambda z}=$$
$$=\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\int\limits_{u=z}^{\infty} e^{-\lambda u}(u-z)L(\theta|u)du$$

Производная четвертого порядка примет следующий вид

$$-\lambda[(\mu+\theta)^3L(\theta|z)+3(\mu+\theta)^2L'(\theta|z)+3(\mu+\theta)L''(\theta|z)+L'''(\theta|z)]e^{-\lambda z}+$$
$$+[(\mu+\theta)^3L'(\theta|z)+3(\mu+\theta)^2L''(\theta|z)+3(\mu+\theta)L'''(\theta|z)+L^{IV}(\theta|z)]e^{-\lambda z}=$$
$$=\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\int\limits_{u=z}^{\infty} e^{-\lambda u}(u-z)L(\theta|u)du,$$

т.е.,

$$\{[-\lambda(\mu+\theta)^3L(\theta|z)-[3\lambda-(\mu+\theta)](\mu+\theta)^2L'(\theta|z)-3[\lambda-(\mu+\theta)](\mu+\theta)L''(\theta|z)-$$
$$-[\lambda-3(\mu+\theta)]L'''(\theta|z)+L^{IV}(\theta|z)\}e^{-\lambda z}=\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)\int\limits_{u=z}^{\infty} e^{-\lambda u}L(\theta|u)du$$

Вновь дифференцируя последнее выражение по z, имеем

$$L^{(V)}(\theta|z)+[3(\mu+\theta)-2\lambda]L^{(IV)}(\theta|z)+[\lambda^2+3(\mu+\theta)^2-6\lambda(\mu+\theta)]L'''(\theta|z)+$$
$$+[3\lambda^2(\mu+\theta)-6\lambda(\mu+\theta)^2+(\mu+\theta)^3]L''(\theta|z)+\lambda(\mu+\theta)^2[3\lambda-2(\mu+\theta)]L'(\theta|z)+ \quad (5.2)$$
$$+\lambda^2[(\mu+\theta)^3-\mu^3\varphi(\theta)]L(\theta|z)=0.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением пятого порядка, характеристическое уравнение и решение которого будут следующие

$$k^5(\theta)+[3(\mu+\theta)-2\lambda]k^4(\theta)+[\lambda^2+3(\mu+\theta)^2-6\lambda(\mu+\theta)]k^3(\theta)+$$
$$+[3\lambda^2(\mu+\theta)-6\lambda(\mu+\theta)^2+(\mu+\theta)^3]k^2(\theta)+\lambda(\mu+\theta)^2[3\lambda-2(\mu+\theta)]k(\theta)+$$
$$+\lambda^2[(\mu+\theta)^3-\mu^3\varphi(\theta)]=0 \quad (5.3)$$

и

$$L(\theta|z)=\sum_{i=1}^{5} c_i(\theta)e^{k_i(\theta)z}.$$

Легко убедиться, что уравнение (5.3) можно записать в следующем виде:

$$(k(\theta)+\mu+\theta)^3(k(\theta)-\lambda)^2=\lambda^2\mu^3\varphi(\theta). \tag{5.4}$$

Теперь, из (5.1) находим граничные условия для (5.2) при $z=0$

$$\begin{cases} L(\theta|0)=1, \\ L'_z(\theta|0)=-\theta, \\ L''_z(\theta|0)=\theta^2, \\ L'''_z(\theta|0)+\mu^3+\theta^3=\lambda^2\mu^3\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} ye^{-\lambda y}L(\theta|y)dy, \\ L_z^{(IV)}(\theta|0)-[\lambda-3(\mu+\theta)]L'''_z(\theta|0)-3(\lambda-\mu-\theta)(\mu+\theta)\theta^2+ \\ +\theta(\mu+\theta)^2[3\lambda-\mu-\theta]-\lambda(\mu+\theta)^3=-\lambda^2\mu^3\ \varphi(\theta)^3\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y}L(\theta|y)dy. \end{cases} \tag{5.5}$$

Учитывая общее решение в системе (5.5), имеем

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{5} c_i(\theta)=1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} k_i(\theta)c_i(\theta)=-\theta, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} k_i^2(\theta)c_i(\theta)=\theta^2, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)}{[k_i(\theta)-\lambda]^2}k_i^3(\theta)\right)c_i(\theta)=\mu^3+\theta^3, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(k_i^4(\theta)-\big(\lambda-3(\mu+\theta)\big)k_i^3(\theta)-\frac{\lambda^2\mu^3\varphi(\theta)}{k_i(\theta)-\lambda}\right)c_i(\theta)= \\ =(\mu+\theta)[3\theta^2(\lambda-\mu-\theta)-\theta(\mu+\theta)(3\lambda-\mu-\theta)+\lambda(\mu+\theta)]. \end{cases} \tag{5.6}$$

Очевидно, что система (5.6) является линейным алгебраическим уравнением, для определения неизвестных $c_i(\theta),\ i=\overline{1,5}$.

Учитывая характеристическое уравнение (5.4) в четвертом и пятом уравнениях системы (5.6), получим.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} c_i(\theta) = 1 \\ \sum_{i=1}^{5} k_i(\theta)c_i(\theta) = -\theta, \\ \sum_{i=1}^{5} k_i^2(\theta)c_i(\theta) = \theta^2, \\ \sum_{i=1}^{5} [3k_i^2(\theta) + 3k_i(\theta)(\mu+\theta) + (\mu+\theta)^2]c_i(\theta) = \mu^2 - \mu\theta + \theta^2, \\ \sum_{i=1}^{5} \{\lambda(\mu+\theta)^3 - (\mu+\theta)^2[\mu+\theta-3\lambda]k_i(\theta) - 3(\mu+\theta)[\lambda+\mu+\theta]k_i^2(\theta)\}c_i(\theta) = \\ \qquad = (\mu+\theta)\{3\theta^2(\lambda-\mu-\theta) - \theta(\mu+\theta)(3\lambda-\mu-\theta) + \lambda(\mu+\theta)\}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Первые три уравнения системы (5.7) входят в четвертый и пятый уравнения. Значит, первые три уравнения линейно зависимы, поэтому достаточно их рассмотреть. Предположим, что $c_4(\theta) = c_5(\theta) = 0$ для всех $\theta > 0$. Тогда из системы (5.7) имеем:

$$\begin{cases} c_1(\theta) + c_2(\theta) + c_3(\theta) = 1 \\ k_1(\theta)c_1(\theta) + k_2(\theta)c_2(\theta) + k_3(\theta)c_3(\theta) = -\theta \\ k_1^2(\theta)c_1(\theta) + k_2^2(\theta)c_2(\theta) + k_3^2(\theta)c_3(\theta) = \theta^2 \end{cases} \tag{5.8}$$

Решая систему (5.8) относительно неизвестных $c_i(\theta)$ $(i = 1,2,3\ )$, получим, что

$$c_1(\theta) = \frac{[\theta + k_2(\theta)][\theta + k_3(\theta)]}{[k_2(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_1(\theta)]},$$

$$c_2(\theta) = -\frac{[\theta + k_1(\theta)][\theta + k_3(\theta)]}{[k_2(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_2(\theta)]},$$

$$c_3(\theta) = \frac{[\theta + k_1(\theta)][\theta + k_2(\theta)]}{[k_3(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_2(\theta)]},$$

$$c_4(\theta) = 0, \qquad c_5(\theta) = 0.$$

Тогда, общее решение (5.2) будет следующим

$$L(\theta|z) = \frac{[\theta + k_2(\theta)][\theta + k_3(\theta)]}{[k_2(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_1(\theta)]} e^{k_1(\theta)z} -$$

$$-\frac{[\theta + k_1(\theta)][\theta + k_3(\theta)]}{[k_2(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_2(\theta)]} e^{k_2(\theta)z} + \frac{[\theta + k_1(\theta)][\theta + k_2(\theta)]}{[k_3(\theta) - k_1(\theta)][k_3(\theta) - k_2(\theta)]} e^{k_3(\theta)z}.$$

Легко видеть, что

$$k_1(0) = 0,\ \ k_1'(0) = \frac{\lambda\mu\varphi'(0) - 3\lambda}{3\lambda - 2\mu}$$

и

$$k_1''(0) = \frac{\lambda\mu}{3\lambda - 2\mu}\left\{\varphi''(0) + \frac{12\lambda\mu}{(3\lambda - 2\mu)^2}[\varphi'(0)]^2 - \frac{(42\lambda + 26\mu)}{(3\lambda - \mu)^2}\varphi'(0) + \frac{90}{(3\lambda - 2\mu)^2}\right\}.$$

Преобразование Лапласа безусловного распределения случайной величины τ_0 из его условного распределения получится следующим образом

$$L(\theta)=\int_0^\infty L(\theta|z)dP\{\zeta_1+\zeta_2<z\}=\frac{\lambda^2[\theta+k_2(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_1(\theta)]}\times$$
$$\times\int_0^\infty ze^{[k_1(\theta)-\lambda]z}dz-\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)]}\int_0^\infty ze^{[k_2(\theta)-\lambda]z}dz+$$
$$+\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_2(\theta)]}{[k_3(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)]}\int_0^\infty ze^{[k_3(\theta)-\lambda]z}dz=\frac{\lambda^2[\theta+k_2(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_1(\theta)][k_1(\theta)-\lambda]^2}-$$
$$-\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)][k_2(\theta)-\lambda]^2}+\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_2(\theta)]}{[k_3(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)][k_3(\theta)-\lambda]^2}. \tag{5.9}$$

Итак, из (5.9) находим, что
$$L(\theta)=\frac{\lambda^2[\theta+k_2(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_1(\theta)][k_1(\theta)-\lambda]^2}-\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_3(\theta)]}{[k_2(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)][k_2(\theta)-\lambda]^2}+$$
$$+\frac{\lambda^2[\theta+k_1(\theta)][\theta+k_2(\theta)]}{[k_3(\theta)-k_1(\theta)][k_3(\theta)-k_2(\theta)][k_3(\theta)-\lambda]^2}.$$
Из последнего выражения имеем
$$L(\theta)=\frac{c_1(\theta)}{[\lambda-k_1(\theta)]^2}+\frac{c_2(\theta)}{[\lambda-k_2(\theta)]^2}+\frac{c_3(\theta)}{[\lambda-k_3(\theta)]^2},$$

$$L'(\theta)=\frac{c_1'(\theta)[\lambda-k_1(\theta)]-2k_1'(\theta)c_1(\theta)}{[\lambda-k_1(\theta)]^3}+\frac{c_2'(\theta)[\lambda-k_2(\theta)]-2k_2'(\theta)c_2(\theta)}{[\lambda-k_2(\theta)]^3}+$$
$$+\frac{c_3'(\theta)[\lambda-k_3(\theta)]-2k_3'(\theta)c_3(\theta)}{[\lambda-k_3(\theta)]^3},$$
$$L"(\theta)=\lambda^2\frac{\{c_2''(\theta)[\lambda-k_2(\theta)]-c_2'(\theta)k_2'(\theta)-2k_2''(\theta)\}[\lambda-k_2(\theta)]+3k_2'(\theta)\{c_2'(\theta)[\lambda-k_2(\theta)]-2k_2'(\theta)c_2(\theta)\}}{[\lambda-k_2(\theta)]^4}+$$
$$+\lambda^2\frac{\{c_3''(\theta)[\lambda-\kappa_3(\theta)]-c_3'(\theta)k_3'(\theta)-2k_3''(\theta)\}[\lambda-k_3(\theta)]+3k_3'(\theta)\{c_3'(\theta)[\lambda-k_3(\theta)]-2k_3'(\theta)c_3(\theta)\}}{[\lambda-k_3(\theta)]^4}.$$
При $\theta=0$ получается, что
$$L'(0)=\frac{(3\lambda-2\mu)c_1'(0)+2\mu\varphi'(0)-3\lambda}{3\lambda-2\mu}+\frac{\lambda^2c_2'(0)}{[k_2(0)-\lambda]^2}+\frac{\lambda^2c_3'(0)}{[k_3(0)-\lambda]^2}.$$

Значит,
$$-E\tau_1^0=L'(0)=\frac{[k_2(0)+k_3(0)][3\lambda-2\mu+2\mu\varphi'(0)]+(2\mu\varphi'(0)-3\lambda)k_2(0)k_3(0)}{(3\lambda-2\mu)k_2(0)k_3(0)}-$$
$$-\frac{k_3(0)\big(3\lambda-2\mu+2\mu\varphi'(0)\big)}{(3\lambda-2\mu)k_2(0)[k_3(0)-k_2(0)][k_2(0)-\lambda]^2}+\frac{k_2(0)[32-2\mu+\lambda\mu\varphi'(0)]}{(3\lambda-2\mu)k_3(0)[k_3(0)-k_2(0)][k_3(0)-\lambda]^2}.$$

Далее, имеем

$$L''(0) = \frac{\lambda[\lambda c_1''(0) + 4c_1'(0)k_1'(0) + 2k_1''(0)] + 6[k_1'(0)]^2}{\lambda^2} +$$
$$+\lambda^2 \frac{\{c_2''(0)(k_2(0) - \lambda) - 4c_2'(0)k_2'(0) - 2k_2''(0)\}}{[k_2(0) - \lambda]^3} +$$
$$+\lambda^2 \frac{\{c_2''(0)(k_3(0) - \lambda) - 4c_3'(0)k_3'(0) - 2k_3''(0)\}}{[k_3(0) - \lambda]^3}.$$

Для дисперсии случайной величины τ_0 получим следующую формулу:

$$D\tau_0(\omega) = L''(0) - [L'(0)]^2 = L''(0) - \left\{\frac{\lambda c_1'(0) + 2k_1'(0)}{\lambda} + \frac{\lambda^2 c_2'(0)}{[k_2(0) - \lambda]^2} + \frac{\lambda^2 c_3'(0)}{[k_3(0) - \lambda]^2}\right\}^2 =$$
$$= \frac{\lambda[\lambda c_1''(0) - \lambda c_1'(0) + 2k_1''(0)] + 2[k_1'(0)]^2}{\lambda^2} = \frac{(2\mu\varphi'(0) - 3\lambda)k_2(0)k_3(0)}{(3\lambda - 2\mu)k_2(0)k_3(0)} \times$$
$$\times [\varphi''(0) + \left[\frac{(k_2(0) - \lambda) - 4k_2'(0) - 2k_2''(0)}{[k_2(0) - \lambda]^4} + \frac{(k_3(0) - \lambda) - 4k_3'(0) - 2k_3''(0)}{[k_3(0) - \lambda]^4}\right] \times$$
$$\times \left(\varphi'(0)\right)^2 + \frac{(42\lambda + 26\mu)\varphi'(0)}{(3\lambda - 2\mu)^2}\Bigg].$$

6. Выводы. В работе в явном виде найдены математическое ожидание и дисперсия момента первого капитального ремонта. Варьируя значениями λ и μ, можем управлять моментом первого капитального ремонта.

Литература

1. Lotov V.I. On the asymptotic of distributions in the sided boundary problems for random walks defined a Markov chain. // Sib.Adv.Math., 1991, Vol.1, №2, pp.26-51.
2 Омарова К.К., Бахшиев Ш.Б. «Преобразование Лапласа распределения нижнего граничного функционала процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле» // Автоматика и вычислительная техника. Рига, 2010, №4, c.77-84.
3. Nasirova T. I., Ibayev E.A. and Aliyeva T. A. Theory of Stochastic Processes Vol.15 (31), №.1, 2009, pp.49–60 the Laplace transform of the ergodic distribution of the process of semi-markovian random walk with negative drift, nonnegative jumps, delays, and delaying screen at zero.
4. Насирова Т.И., Гасанова А.М. «Определение числовых характеристик момента первого капитального ремонта компрессорного устройства» // Автоматика и вычислительная техника. Рига, 2011, №3, c.45-55.
5. Nasirova T.I., Kerimova U.Y. Definition of Laplace transforms for distibution of the first passage of zero level of the semi-markov random process with positive tendency and negative jamp. Applied Mathematics, 2011, №2, pp.1-4.
6. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., УРСС, 2003, с.472.

UOT 519. 217

A.M. Həsənova

Kompressor qurğusunun ilk əsaslı təmir anının orta vaxtının və dispersiyasının təyini

Bu məqalədə kompressor qurğusunun ilk əsaslı təmir anını ehtimalı-statistik metodu ilə aşkar Laplas çevrilməsini və xüsusən də onun riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapılır. Bu məqalədə alınmış nəticələr təsadüfü dolaşmalar ilə əlaqədar olan modeli tədqiq etməyə imkan verir. Eyni zamanda ehtiyatların idarəetmə nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərinə tətbiq etməyə və neft sənayesində istifadə etməyə imkan yaradır.

Açar sözlər: Laplas çevirməsi, ehtimal fəzası, mənfi axınlı proses

A.M. Hasanova

Determining average time and variance of the first overhaul moment of compressor device

In the paper, we find an explicit form of Laplace transform of distribution of the first overhaul moment of a compressor device, in particular its mathematical expectation and variance, by the probability-statistical method. The result obtained in the paper allows investigating the models related with random walks constructed over the sums of independent equidistributed random variables and applying them to some inventory theory problems and in oil industry.

Keywords: Laplace transform, probability space, process with a negative drift

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 15.12.2017