

УДК 621.0:519.873

В.Я. КОПП, М.В. ЗАМОРЕНОВ, Н.И. ЧАЛЕНКОВ

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ФАЗОВОГО УКРУПНЕНИЯ НЕРЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ

*Рассматривается новый подход к моделированию нерегенерирующих полумарковских систем, основанный на предлагаемой лемме и доказанной на её основе теореме о функции распределения времени пребывания полумарковской системы в подмножестве непрерывных состояний с учётом действия как простого, так и непростого процесса восстановления. Указанная теорема позволяет осуществлять фазовое укрупнение систем с общим фазовым пространством без предварительного определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Для подтверждения правильности предлагаемого метода моделирования приводится пример анализа процесса функционирования нерегенерирующей системы, в качестве которой взято обслуживающее устройство при наличии у него необесценивающих отказов. Моделирование выполнено как известным классическим методом, так и изложенным в статье. Сравнение результатов моделирования показало практически полное их совпадение.*

**Ключевые слова:** нерегенерирующая полумарковская система; фазовое укрупнение; процесс восстановления; функция распределения; непрерывные состояния; необесценивающие отказы

**1. Введение.** Математический аппарат полумарковских процессов [1, с.26; 2, с.34] является мощным средством моделирования стохастических систем. Удобству его применения способствует алгоритм фазового укрупнения, подробно формализованный в [2, с.34]. Одним из важнейших и наиболее сложных его этапов является определение стационарного распределения вложенной цепи Маркова (ВЦМ), что не всегда является разрешимой задачей. Анализ литературы [3-12] показывает, что в ряде случаев определение стационарного распределения ВЦМ приводит к необходимости решать системы интегральных уравнений, содержащих функции от сумм и разностей переменных, а общих методов решения таких задач в общем виде не существует. Имеются отдельные частные решения для некоторых конкретных задач. Сказанное значительно затрудняет использование аппарата ПМ процессов. Если же стационарное распределение ВЦМ найдено, то можно использовать алгоритм фазового укрупнения ПМ систем, что, в данном случае, не вызывает особых сложностей, хотя и требует значительных математических выкладок. При этом ПМ состояния на графе, содержащие непрерывную компоненту, эквивалентно заменяются укрупнёнными дискретными состояниями. Дальнейшее построение ПМ модели не вызывает сложностей потому, что: во-первых, для определения стационарного распределения ВЦМ для дискретной системы требуется решать систему алгебраических уравнений, а не интегральных, а во-вторых, из [13, с.142; 14, с.26] известны методы, позволяющие получать точное решение системы уравнений марковского восстановления для дискретных случаев при условии, что к используемым функциям распределения случайных величин применимо преобразование Лапласа.

**2. Постановка задачи.** Целью статьи является исключение из процесса моделирования процедуры определения стационарного распределения ВЦМ для систем с непрерывным фазовым пространством состояний, включая нерегенерирующие системы. В ряде случаев для осуществления фазового укрупнения ПМ систем используется формула для определения функции распределения случайной величины  $\gamma$ , являющейся разностью случайных величин (СВ)  $\alpha$  и  $\beta$  при условии, что  $\alpha > \beta$  [15]. В [15, с.46] она обозначается как  $\gamma = [\alpha - \beta]^+$ , а выражение для ее функции распределения имеет вид:

$$F_{\gamma}(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(t) f_2(t) dt} \quad (2.1)$$

где  $F_1(t)$  – функция распределения СВ  $\alpha$ , а  $F_2(t)$  и  $f_2(t)$  – функция и плотность распределения СВ  $\beta$ .

**3. Решение задачи.** Формула (2.1) пригодна для случая, когда рассматриваются просто случайные величины (СВ)  $\alpha$  и  $\beta$  с указанными функциями распределения. Остановимся на ней подробнее. Она представляет собой смесь [16, с.54]. В этой формуле выражение  $\frac{[F_1(t+y)-F_1(y)]}{\int_0^\infty \bar{F}_1(t)f_2(t)dt}$  представляет собой зависящее от действительного параметра  $y>0$  семейство функций распределения, а  $F_2(y)$  – весовую функцию. Выберем в качестве весовой функции единичный скачок. Для этого примем

$$F_2(y) = 1_x(y) = \begin{cases} 1, & y > x; \\ 0, & y \leq x. \end{cases}$$

При этом плотность распределения (ПР) равна:  $f_2(y) = \delta(y-x)$ , где  $\delta(y-x)$  – дельта функция. Подставив последнее выражение в (2.1) получим:

$$F_\gamma(t, x) = \frac{\int_0^\infty F_1(t+y)\delta(y-x)dy - \int_0^\infty F_1(y)\delta(y-x)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)\delta(y-x)dy} = \frac{F_1(t+x)-F_1(x)}{\bar{F}_1(x)} = F_B(t, x). \quad (3.1)$$

Отметим, что выражение (3.1) совпадает с выражением для функции распределения разности  $\alpha-x$ , где  $x$  константа, для которой выполняется условие  $x<t$  [16]. Указанное выражение иногда называют «время вперед». Обозначим его  $F_B(t, x) = F_1(t, x_B)$ . Тогда сформулируем и докажем следующую лемму об аппроксимации функции распределения времени разности двух СВ ( $\alpha-\beta$ ), при условии, что ( $\alpha>\beta$ ).

*Лемма.* Функция  $F_\gamma(t)$  распределения времени разности двух СВ ( $\alpha-\beta$ ) с функциями распределения  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  соответственно, при условии, что ( $\alpha>\beta$ ), определяемая выражением

$$F_\gamma(t, x) = \frac{\int_0^\infty F_1(t+y)f_2(y)dy - \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy},$$

с учётом того, что

$$F_2(t) = 1_x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq x_B; \\ 0, & t < x_B, \end{cases}$$

имеет вид

$$F_\gamma(t, x) = \frac{F_1(t+x_B)-F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)},$$

где значение параметра  $x_B$  выбирается из равенства.

$$\frac{\int_0^\infty [F_1(t+y)-F_1(y)]f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy} = \frac{F_1(t+x_B)-F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)} \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Запишем правую и левую части (3.1) через вероятностные соотношения. Для правой части (3.1):

$$F(t, x) = P\left\{\alpha - x \leq \frac{t}{\alpha} > x_B\right\} = \frac{P\{x < \alpha \leq t + x_B\}}{P\{\alpha > x_B\}} = \frac{P\{\alpha - x_B \leq t\} - P\{\alpha < x_B\}}{P\{\alpha > x_B\}}. \quad (3.3)$$

Для левой части (3.2):

$$\frac{P\{\alpha - \beta \leq t\} - P\{\alpha < \beta\}}{P\{\alpha > \beta\}}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим числители (3.3) и (3.4), то есть выражения  $P\{\alpha - \beta \leq t\} - P\{\alpha < \beta\}$  и  $P\{\alpha - x_B \leq t\} - P\{\alpha < x_B\}$ . Так как  $0 \leq x \leq \infty$  то всегда существует такое  $x_B$ , при котором выполняется равенство:  $P\{\alpha - \beta \leq t\} = P\{\alpha - x_B \leq t\}$ . Но если это так, то  $P\{\alpha \leq t + \beta\} = P\{\alpha \leq t + x_B\}$ , и, следовательно,  $P\{\alpha < \beta\} = P\{\alpha < x_B\}$ . Откуда получаем, что:

$$\frac{[P\{\alpha - \beta\} - P\{\alpha < \beta\}] < t}{P\{\alpha > \beta\}} = \frac{P\{x < \alpha - x_B \leq t\}}{P\{\alpha > x_B\}}. \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) вытекает равенство:

$$F_\gamma(y) = \frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)] f_2(y) dy}{\int_0^\infty \overline{F_1}(y) f_2(y) dy} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{\overline{F_1}(x_B)} = F_1(t, x_B).$$

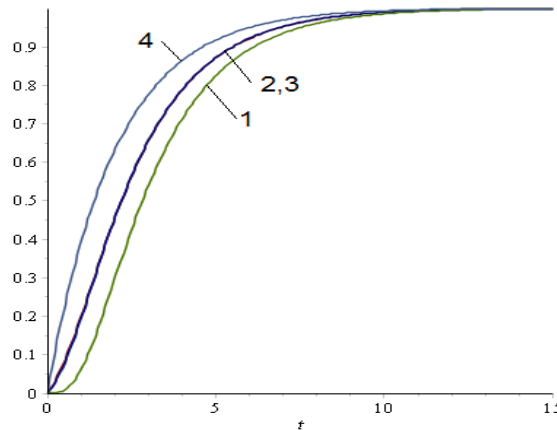
Лемма доказана.

**4. Пример.** Приведём пример аппроксимации функции  $F_\gamma(t)$  функцией  $F_1(t, x_B)$ .  $F_1(t)$  является функцией распределения обобщённого закона Эрланга четвёртого порядка с параметрами  $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1.9$  и  $\lambda_4 = 3.2$ , а функция  $F_2(t)$  имеет функцию распределения обобщённого закона Эрланга второго порядка с параметрами  $\beta_1 = 1.9, \beta_2 = 3.2$ . Плотность распределения  $f^{(n)}(t)$  обобщённого закона Эрланга  $n$ -го порядка имеет вид:

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \lambda_i \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{e^{\lambda_j t}}{\prod_{k=1}^n (\lambda_j - \lambda_k)}, \quad (t > 0),$$

где  $\lambda_i, (i = \overline{1, n})$  – параметры обобщенного закона Эрланга  $n$ -го порядка. Применяя эту формулу при различных  $x_B$ , т.е.  $x_{B1} = 0, x_{B2} = 0.667763158$  и  $x_{B3} = 5$ , получим следующие результаты.

Математические ожидания функций  $F_1(t, x_{B1}), F_1(t, x_{B2}), F_\gamma(t)$  и  $F_1(t, x_{B3})$  соответственно равны  $m_{x_{B1}} = 3.338815793, m_{x_{B2}} = m_\gamma = 2.726304253$  и  $m_{x_{B3}} = 2.004498414$ .



**Рис. 1.** Результаты моделирования (кривая 1 – функция  $F_1(t, x_{B1})$  при  $x_{B1} = 0$ ; кривые 2,3 – соответственно функция  $F_1(t, x_{B2})$  при  $x_{B2} = 0.667763158$  и  $F_\gamma(t)$ ; кривая 4 – функция  $F_1(t, x_{B3})$  при  $x_{B3} = 5$ .)

Как видно из рис. 1, при  $m_{x_{B2}} = m_\gamma = 2.726304253$  кривые 2, 3 совпадают по плотности, что подтверждает правильность доказанной леммы, а, следовательно, и выражения (3.2). Если же вместо СВ  $\beta$  рассматривается простой процесс восстановления, порождаемый ФР  $F_2(t)$ , т.е. со СВ  $\beta_\Sigma = \sum_{k=1}^\infty \beta_k$ , где  $\beta_k = \sum_{i=1}^k \beta$  с ПР  $f_2^{(*)k}(t)$ , где  $\beta$  – случайная величина с ПР  $f_2(t)$ , то данная формула неприменима и нужно пользоваться формулой:

$$F_{\alpha - \beta_\Sigma}(t) = P\{[\alpha - \beta_\Sigma]^+ \leq t\} = \frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2(y) dy}{\int_0^\infty \overline{F_1}(x) h_2(x) dx}, \quad (4.1)$$

где  $h_2(y) = \sum_{k=1}^\infty f_2^{(*)k}(y) = \sum_{k=1}^\infty f_{2,k}(y)$  – плотность функции восстановления. Доказательство формулы (4.1) приведено ниже. В случае, если вместо простого процесса восстановления рассматривается непрямой процесс, порождаемый ФР  $F_\gamma(t)$  и  $F_2(t)$ , то есть со СВ  $\beta_\Sigma = \gamma + \sum_{k=0}^k \beta_k = \gamma + \beta_k$ , где СВ  $\beta$  имеет ПР  $f_2(t)$ , СВ  $\beta_k = \sum_{i=1}^k \beta$  имеет ПР  $f_2^{(*)k}(t)$ , СВ  $\gamma$  является временем первого скачка и имеет ПР  $f_\gamma(t)$ , а СВ  $\beta_\Sigma$  имеет ПР  $f_\gamma(t) * f_2^{(*)k}(t)$ ,  $k = (\overline{0, \infty})$ , то формула (4.1) неприменима и необходимо пользоваться следующей теоремой.

**5. Теорема о ФР времени пребывания в подмножестве непрерывных состояний с учётом непростого процесса восстановления.** Итак, имеет место следующая

*Теорема.* ФР  $F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t)$  разности СВ  $\alpha$  и СВ  $\beta_{\Sigma} = \gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$  – времени восстановления в одноименном непростом потоке, порождаемом ФР  $F_2(t)$  СВ  $\beta$  и ФР  $F_{\gamma}(t)$  СВ  $\gamma$  при условии  $\alpha > \beta_{\Sigma}$ , имеет вид:

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = P\{[\alpha - \beta_{\Sigma}]_{\Sigma}^+ \leq t\} = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2^{\gamma}(y) dy}{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) h_2^{\gamma}(y) dy} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)}, \quad (5.1)$$

где  $f_{\gamma}(y)$  и  $h_2^{\gamma}(y)$  – плотность распределения СВ  $\gamma$  и плотность восстановления потока восстановлений, порождаемого СВ  $\beta$  и  $\gamma$ , равная  $h_2^{\gamma}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\gamma}(t) * f_2^{(*)k}(t)$ , а  $x_B$  подбирается численно из соотношения (5.1).

*Доказательство.* В данном случае рассматривается не одна СВ, а целое множество, состоящее из  $\beta_k = \sum_{i=1}^k \beta$ ;  $k = (\overline{1, \infty})$ , каждая из которых имеет ПР  $f_2^{(*)k}(y)$  и СВ  $\gamma$  с ПР  $F_{\gamma}(t)$ . ФР  $F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t)$  находится по формуле полной вероятности. Определим вероятности гипотез, для чего сначала определим возможные события, и вероятности их появления, считая, что максимально возможное число восстановлений  $n$ :

- произошло 0 восстановлений, вероятность события  $P_0 = P\{\alpha > \gamma\}$ ;
- произошло 1 восстановление, вероятность события  $P_1 = P\{\alpha > \gamma + \beta_1\}$ ;
- произошло 2 восстановления, вероятность события  $P_2 = P\{\alpha > \gamma + \beta_2\}$ ;
- .....
- произошло  $n$  восстановлений, вероятность события  $P_n = P\{\alpha > \gamma + \beta_n\}$ ;
- произошло более  $n$  восстановлений, вероятность события  $P_{>n}$ .

Указанные события образуют полную группу, поэтому  $P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n + P_{>n} = 1$ . Так как нас интересуют только первые  $n$  событий, то нужно рассматривать условные вероятности  $P_{i,y}$ ,  $i = (\overline{1, n})$  этих  $n$  событий:

$$P_{0,y} = \frac{P_0}{P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n}; P_{1,y} = \frac{P_1}{P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n}; \dots P_{n,y} = \frac{P_n}{P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n}.$$

Теперь можно записать вероятности гипотез  $dP(H_i)$  в дифференциальной форме, которые при различном числе восстановлений при попадании аргумента на интервал  $[y, y + dy]$ , с учётом того, что максимально возможное число восстановлений  $n$  равны:

- произошло 0 восстановлений, вероятность гипотезы
 
$$dP[H_0(y)] = \frac{f_{\gamma}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \sum_{i=0}^k \beta)\}} = \frac{f_{\gamma}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}};$$

- произошло 1 восстановление, вероятность гипотезы
 
$$dP[H_1(y)] = \frac{f_{\gamma} * f_2(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}};$$

- произошло 2 восстановления, вероятность гипотезы
 
$$dP[H_2(y)] = \frac{f_{\gamma} * f_2^{(*)2}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}};$$

.....

- произошло  $n$  восстановлений, вероятность гипотезы
 
$$dP[H_n(y)] = \frac{f_{\gamma} * f_2^{(*)n}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}}.$$

Условная вероятность события  $A$ , состоящего в выполнении условия  $\alpha > \beta_{\Sigma}$ , при любой гипотезе  $dH_i$ , ( $i = \overline{0, n}$ ), равна:  $P(A|dH_i) = [F_1(t + y) - F_1(y)]$ . Используя формулу полной

вероятности, получим выражение для функции распределения  $F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}^n(t)$  при заданном возможном числе  $n$  восстановлений:

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}^n(t) = P\{[\alpha - \beta_k]_{\Sigma}^+ \leq t\} = \int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] \sum_{k=1}^n \frac{f_Y^* f_2^{(*)k}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}}. \quad (5.2)$$

Отметим, что  $\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{f_Y^* f_2^{(*)k}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}} = 1$ , где  $P_{ky} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y^* f_2^{(*)k}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}}$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) – условные вероятности гипотез. Для случая, когда  $n \rightarrow \infty, P_{>n} \rightarrow 0$ , вероятность гипотезы в дифференциальной форме  $dP[H_{\infty}]$  равна:

$$dP[H_{\infty}] = \frac{f_Y^* f_2^{(*)\infty}(y) dy}{\sum_{k=1}^{\infty} P\{\alpha > (\gamma + \sum_{i=0}^k \beta)\}} = \frac{f_Y^* f_2^{(*)\infty}(y) dy}{\sum_{k=1}^{\infty} P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}}.$$

Используя формулу полной вероятности и учитывая, что условная вероятность события  $A$  остаётся прежней, получим выражение для  $F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t)$ :

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2^Y(y) dy}{\int_0^{\infty} F_1(y) h_2^Y(y) dy}. \quad (5.3)$$

Как и выше, выполняется условие:  $\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_Y^* f_2^{(*)\infty}(y) dy}{\sum_{k=1}^{\infty} P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}} = 1$ , где дифференциалом весовой функции  $R(y)$  является выражение:  $dR(y) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_Y^* f_2^{(*)k}(y) dy}{\sum_{k=1}^{\infty} P\{\alpha > (\gamma + \beta_k)\}}$ . Таким образом, выражение (5.3) полностью аналогично выражению (2.1). Применив к нему лемму (3.2) получим:

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2^Y(y) dy}{\int_0^{\infty} F_1(y) h_2^Y(y) dy} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{F_1(x_B)}.$$

Теорема доказана.

*Следствие 1.* В частном случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  являются просто случайными величинами, их разность при условии, что  $\alpha > \beta$ , определяется формулой

$$F_Y(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^{\infty} F_1(t) f_2(t) dt} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{F_1(x_B)}. \quad (5.4)$$

*Следствие 2.* В случае, когда вместо СВ  $\beta$  рассматривается простой процесс восстановления, порождаемый ФР  $F_2(t)$ , получается формула (7) полностью аналогичная (2.1), поэтому:

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = P\{[\alpha - \beta_k]^+ \leq t\} = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2(y) dy}{\int_0^{\infty} F_1(x) h_2(x) dx} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{F_1(x_B)}. \quad (5.5)$$

*Следствие 3.* В случае, если может произойти не более  $n$  восстановлений, то получается формула (5.2) полностью аналогичная (2.1), поэтому:

$$F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = P\{[\alpha - \beta_k]^+ \leq t\} = \int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] \sum_{k=1}^n \frac{f_Y^* f_2^{(*)k}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \sum_{i=0}^k \beta)\}} \\ F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{F_1(x_B)}. \quad (5.6)$$

Теорема о ФР времени пребывания в подмножестве непрерывных состояний с учётом как простого, так и непростого процесса восстановления позволяет предложить метод фазового укрупнения нерегенерирующих полумарковских систем, не включающий в себя этап определения стационарного распределения ВЦМ для систем с общим фазовым пространством, что устраняет ряд проблем, о которых было сказано выше. Он базируется на двух принципах.

Первый принцип состоит в том, что вид функции распределения, получающийся как разность двух случайных величин при условии, что первая больше вычитаемой, причём вычитаемая может быть как просто случайной величиной, так и простым или непростым

процессом восстановления, остаётся одинаковым и определяется только константой  $x_B$ , входящей в формулы (3.2), (5.1), (5.5), (5.6).

Второй принцип предполагает, что, какие-то параметры системы или входящих в неё элементов остаются неизменными. Эти параметры позволяют сформировать дополнительные условия для определения неизвестных констант, определяющих функции распределения. Так, например, для обслуживающей системы такими параметрами могут быть коэффициент готовности системы и среднее время обслуживания единицы продукции, для чего может использоваться теорема о пребывании системы в заданном подмножестве состояний [2]. В задаче определения надёжности системы указанными параметрами могут быть коэффициенты готовности элементов, из которых она состоит. Выбор дополнительных условий ниже демонстрируется на примере.

В целом метод является многошаговым поисковым методом и состоит из ряда операций, повторяющихся на каждом шаге. Перед первым шагом предполагается, что система является дискретной и все  $x_{Bi} = 0$ , ( $i = \overline{1, q}$ ), где  $q$  – число состояний, содержащих непрерывную компоненту. Соответственно и дополнительных условий должно быть  $q$ .

Сначала удобно определить минимальные граничные значений случайных величин, содержащих непрерывную компоненту. Для этого на первом шаге от них отнимается простой процесс восстановления с использованием формулы (5.6), порождённый ФР СВ, образующей с рассматриваемой СВ “петлю возврата”. Термин “петля возврата” будет ясен из рисунка в примере, приводимом ниже. Пока просто скажем, что если имеются два состояния и из первого есть непосредственный переход во второе, а из второго в первое то образуется “петля возврата”. Разности указанных случайных величин и простых процессов восстановления дают нижние граничные значения соответствующих СВ. Максимальными их значениями являются их начальные значения (пока от СВ ничего не отнималось). Удобнее определять математические ожидания этих величин и по ним находить соответствующие им  $x_B$  с помощью (5.6). Нужно помнить, что когда говорится о вычитании, то имеется в виду, что оно всегда производится при условии  $\alpha > \beta_\Sigma$ .

На всех последующих шагах от исходных СВ отнимаются непростые процессы восстановления. ФР первого скачка в этих непростых процессах восстановления образуются за счёт увеличения значений  $x_B$ :  $x_{Bi+1} = x_{Bi} + \Delta x_B$ , где  $i$  – номер шага. Отметим что чем больше значение  $x_B$ , тем меньше математическое ожидание, соответствующее ФР первого скачка.

Операции, выполняемые далее, после определения новых ФР СВ путём вычитания из их исходных значений простых потоков восстановлений, следующие:

1. определяются времена пребывания в состояниях и соответствующие им функции распределения;
2. определяются вероятности переходов;
3. определяется стационарное распределение ВЦМ, что для дискретной системы не представляет сложности:  $\rho_k = \sum_{k \in E} \rho_r p_{rk}$ ;
4. определяется стационарное распределение полумарковского процесса:  $\pi_k = \frac{\rho_k m_k}{\sum_{k \in E} \rho_k m_k}$ ;
5. производится проверка  $q$  дополнительных условий, которые запишем в общем виде:

$$P_{zi} = P_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{Bq}), (i = \overline{1, q}), \quad (5.7)$$

где  $P_{zi}$  – заданный неизменный параметр;  $P_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{Bq})$  – этот же параметр, вычисленный по модели. Если условия (5.7) не выполняются процесс продолжается до тех пор пока они не выполняются, а искомые параметры  $x_{Bq}$  не станут решением системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k = \sum_{k \in E} \rho_k p_{rk}; \\ \pi_k = \frac{\rho_k m_k}{\sum_{k \in E} \rho_k m_k}; \\ \Pi_{zi} = \Pi_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{vq}), (i = \overline{1, q}). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Для поиска решений может использоваться любой из известных численных методов. Отметим один удобный приём, позволяющий упростить процедуру поиска решения. После того, как на первом шаге из соответствующих СВ были вычтены простые процессы восстановления, можно работать только с полученными разностями, подбирая необходимые  $x_{vq}$  таким образом, чтобы полученные значения СВ удовлетворяли системе (5.8). Этот процесс фактически аналогичен вычитанию непростых процессов восстановления, а формула (5.1) используется для проверки правильности результатов расчётов.

**6. Пример моделирование процесса функционирования обслуживающего устройства (ОУ) с учётом необесценивающих отказов.** Опишем функционирование рассматриваемого обслуживающего устройства (ОУ) [14]. Время обслуживания единицы продукции ОУ – СВ  $\alpha_1$  с ФР  $F_1(t) = P\{\alpha_1 \leq t\}$ . Время безотказной работы ОУ – СВ  $\alpha_2$  с ФР  $F_2(t) = P\{\alpha_2 \leq t\}$ ., время восстановления ОУ – СВ  $\beta_2$  с ФР  $G_2(t) = P\{\beta_2 \leq t\}$ . СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания  $m_1, m_2, m_g$ ; у ФР  $F_1(t), F_2(t), G_2(t)$  существуют плотности  $f_1(t), f_2(t), g_2(t)$ . При отказе ОУ обслуживание единицы продукции прерывается, после восстановления его работоспособности обслуживание продукции продолжается с учётом времени прерванного обслуживания. Данная система, как будет показано, является нерегенерирующей. Необходимо выполнить её фазовое укрупнение, то есть эквивалентно заменить её системой с дискретным фазовым пространством состояний.

Для описания функционирования системы используем процесс марковского восстановления (ПМВ)  $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$  и соответствующий ему полумарковский процесс (ПМП)  $\xi(t)$  с состояниями:

- $10x$  – ОУ работоспособен, началось обслуживание очередной единицы продукции; время, оставшееся до отказа ОУ, равно  $x \geq 0$ ;
- $11x$  – мгновенное состояние, соответствующее моменту окончания обслуживания единицы продукции; время, оставшееся до отказа ОУ, равно  $x \geq 0$ ;
- $20x$  – произошло восстановление работоспособности ОУ и продолжено прерванное обслуживание единицы продукции; время, оставшееся до окончания прерванного обслуживания, равно  $x \geq 0$ ;
- $21x$  – произошёл отказ ОУ, обслуживание единицы продукции прервано; время, оставшееся до окончания прерванного обслуживания, равно  $x \geq 0$ .

Граф переходов системы представлен на рис. 2. Фазовое пространство состояний имеет вид:  $E = \{10x, 11x, 20x, 21x\}$ . В данной структуре имеется две «петли возврата»: первая петля, образована состояниями  $11x$  и  $10x$ , а вторая состояниями  $20x$  и  $21x$ . Как видно, данная система является системой с непрерывным фазовым пространством, а кроме того она является нерегенерирующей, так как каждое её состояние содержит непрерывную компоненту. Необходимо провести фазовое укрупнение системы, то есть эквивалентно заменить её дискретной системой, состоящая которой не содержит непрерывных компонент.

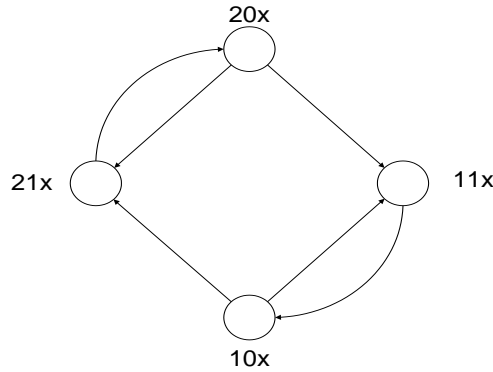


Рис. 2. Граф состояний

Для подтверждения правильности предлагаемого метода сравним решения данной задачи как классическим методом, предложенным в [1, с.53], так и методом, изложенным выше.

*Решение классическим методом.* Для данной задачи укрупнение классическим методом приведено в [14, с.24]. Опишем плотности и вероятностей переходов ВЦМ для системы с непрерывными состояниями:

$$p_{10x}^{11y} = f_1(x - y), 0 < y < x; p_{10x}^{21y} = f_1(x + y), y > 0;$$

$$p_{20x}^{21y} = f_2(x - y), 0 < y < x; p_{20x}^{11y} = f_2(x + y), y > 0; P_{11x}^{10y} = 1; P_{21x}^{20y} = 1.$$

Обозначим через  $\rho_{10}(x), \rho_{11}(x), \rho_{20}(x), \rho_{21}(x)$  плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова для состояний 10x, 11x, 20x, 21x, соответственно. Система интегральных уравнений для плотностей стационарных распределений имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_{11}(x) = \int_x^\infty f_1(y - x)\rho_{10}(y)dy + \int_0^\infty f_2(x + y)\rho_{20}(y)dy; \\ \rho_{21}(x) = \int_x^\infty f_2(y - x)\rho_{20}(y)dy + \int_0^\infty f_1(x + y)\rho_{10}(y)dy; \\ \rho_{10}(x) = \rho_{11}(x); \rho_{20}(x) = \rho_{21}(x); \\ \int_0^\infty (\rho_{10}(x) + \rho_{11}(x) + \rho_{20}(x) + \rho_{21}(x))dx = 1. \end{cases}$$

В работе [17] показано, что решение этой системы определяется формулами

$$\rho_{10}(x) = \rho_{11}(x) = \rho_0 \overline{F_2}(x); \rho_{20}(x) = \rho_{21}(x) = \rho_0 \overline{F_1}(x),$$

где постоянная  $\rho_0$  находится в явном виде из условия нормировки. Времена пребывания в состояниях равны:  $\nu_{10x} = x \wedge \alpha_1; \nu_{11x} = 0; \nu_{21y} = \beta_2; \nu_{20y} = y \wedge \alpha_2$ .

ФР времён пребывания в состояниях:  $\overline{F_{10x}}(t) = \overline{1_x}(t) \cdot \overline{F_1}(t); F_{21y}(t) = G_2(t); \overline{F_{20y}}(t) = \overline{1_y}(t) \cdot \overline{F_2}(t)$ , где  $\overline{1_x}(t) = \begin{cases} 1, & t < x; \\ 0, & t \geq x; \end{cases} \overline{1_y}(t) = \begin{cases} 1, & t < y; \\ 0, & t \geq y. \end{cases}$

Далее для перехода к дискретной системе используется алгоритм фазового укрупнения (АФУ), предложенный в [1]. Для укрупнённой системы определяются вероятности  $\widehat{P}_{k,r}$  переходов и ФР  $\widehat{F}_k(t)$  времен пребывания системы в дискретных состояниях  $S_{10}$  и  $S_{20}$  по формулам [1, с.78]:

$$\widehat{P}_{k,r} = \frac{\int_{E_k} \rho(dx)P(x, E_r)}{\rho(E_k)} \quad (6.1)$$

$$\widehat{F}_k(t) = \frac{\int_{E_k} \rho(dx)F_x(t)}{\rho(E_k)} \quad (6.2)$$

Для состояния  $S_{20}$ :  $\rho_{21} = \rho_{20} = \rho_0 \int_0^\infty \overline{F_1}(x)dx = \rho_0 m_{\alpha_1}$ . Тогда по формуле (6.1) находим вероятности переходов  $P_{20}^{21}$  и  $P_{20}^{11}$ :



$$P_{20}^{21} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \int_0^x f_2(x-y) \overline{F}_1(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_1(x) F_2(x) dx}{m_{\alpha_1}},$$

$$P_{20}^{11} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \int_0^x f_2(x+y) \overline{F}_1(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(x) dx}{m_{\alpha_1}}.$$

Определим ФР времени пребывания системы для в дискретном состоянии  $S_{20}$ , используя (6.2):

$$\widehat{F}_{20}(t) = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_1(x) dx [1 - \overline{1}_x(t) \cdot \overline{F}_2(t)] dx}{\rho_0 m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_1(x) dx [1 - \overline{1}_x(t) \cdot \overline{F}_2(t)] dx}{m_{\alpha_1}}.$$

Проведя преобразования, получим:  $\widehat{F}_{20}(t) = \frac{m_{\alpha_1} F_2(t) + \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_1(x) dx}{m_{\alpha_1}}$ .

Для состояния  $S_{10}$ :  $\rho_{11} = \rho_{10} = \rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx = \rho_0 m_{\alpha_2}$ . По формуле (6.1) находим вероятности переходов  $P_{10}^{21}$  и  $P_{10}^{11}$ :

$$P_{20}^{11} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \int_0^x f_1(x-y) \overline{F}_2(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_2(x) F_1(x) dx}{m_{\alpha_2}}, P_{20}^{21} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \int_0^x f_1(x+y) \overline{F}_2(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_2(x) \overline{F}_1(x) dx}{m_{\alpha_2}}.$$

Определим ФР времени пребывания системы для в дискретном состоянии  $S_{10}$ , используя (6.2):

$$\widehat{F}_{10}(t) = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx [1 - \overline{1}_x(t) \cdot \overline{F}_1(t)] dx}{\rho_0 m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^\infty \overline{F}_2(x) dx [1 - \overline{1}_x(t) \cdot \overline{F}_1(t)] dx}{m_{\alpha_2}}.$$

Проведя преобразования, получим:

$$\widehat{F}_{10}(t) = \frac{m_{\alpha_2} F_1(t) + \overline{F}_1(t) \int_0^t \overline{F}_2(x) dx}{m_{\alpha_2}}.$$

После определения вероятностей  $\widehat{P}_{k,r}$  переходов и ФР  $\widehat{F}_k(t)$  времен пребывания системы в дискретных состояниях нахождение стационарного распределения  $\widehat{\rho}_k$  ВЦМ для укрупнённой системы не вызывает трудностей, оно определяется по формуле:  $\widehat{\rho}_k = \sum_{k \in E} \widehat{\rho}_r \cdot \widehat{P}_{k,r}$ .

Таким образом, классическим методом [1] был осуществлён переход к эквивалентной системе с дискретными состояниями. Граф такой системы представлен на рисунке 2. Как видно из рисунка 3, у состояний графа отсутствуют непрерывные компоненты, то есть система является дискретной.

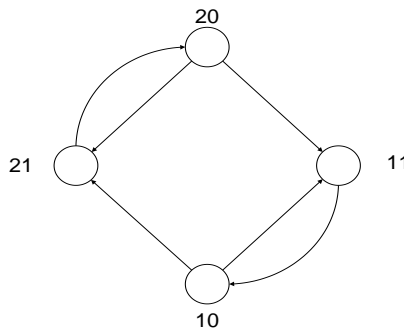


Рис. 3. Граф состояний системы с дискретными состояниями

**7. Решение задачи укрупнения системы предлагаемым численным методом.** В данной не укрупнённой системе (рис. 1) имеются две непрерывные компоненты. Запишем два дополнительных условия, необходимых для их определения. Каждое условие, как указано выше, связано с неизменяющимся параметром, которыми в данном конкретном случае являются коэффициент готовности  $K_{гд}$  и математическое ожидание времени обслуживания единицы продукции  $m_{гд}$ . Эти величины соответственно равны:  $K_{гд} = \frac{m_2}{m_2 + m_g}$ ;  $m_{гд} =$

$\frac{m_1(m_2+m_g)}{m_g}$ . Эти же параметры, определяемые из укрупнённой полумарковской модели равны:

$$K_r = \pi_{10} + \pi_{10}; m_r = \frac{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}}{\rho_{11}}.$$

Выражение для  $m_r$  получено с использованием теоремы о математическом ожидании времени пребывания системы в заданном подмножестве состояний [2, с.24]. Тогда дополнительные условия имеют вид:  $\pi_{10} + \pi_{10} = \frac{m_2}{m_2+m_g}$ ;  $\frac{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}}{\rho_{11}} = \frac{m_1(m_2+m_g)}{m_g}$ .

Далее определяем выражения для  $\rho_k$  и  $\pi_k$  по формулам:

$$\rho_k = \sum_{k \in E} \rho_r p_{rk}; \pi_k = \frac{\rho_k m_k}{\sum_{k \in E} \rho_k m_k}.$$

После проведённых выкладок запишем систему уравнений, которой должны удовлетворять искомые параметры  $x_{B_1}$  и  $x_{B_2}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{10} = \frac{P_{20}^{11}}{2(P_{20}^{11}+P_{10}^{21})} \\ \rho_{11} = \rho_{10} \\ \rho_{20} = \frac{P_{10}^{21}}{2(P_{20}^{11}+P_{10}^{21})} \\ \rho_{21} = 1 - \rho_{10} - \rho_{11} - \rho_{20} \\ \pi_{10} = \frac{m_{10}\rho_{10}}{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}} \\ \pi_{20} = \frac{m_{20}\rho_{20}}{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}} \\ \pi_{21} = \frac{m_{21}\rho_{21}}{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}} \\ \pi_{10} + \pi_{10} = \frac{m_2}{m_2+m_g} \\ \frac{m_{10}\rho_{10}+m_{20}\rho_{20}+m_{21}\rho_{21}}{\rho_{11}} = \frac{m_1(m_2+m_g)}{m_g} \end{array} \right. , \quad (7.1)$$

где  $P_{10}^{21}$ ,  $P_{20}^{11}$  вероятности перехода из состояния  $S_{10}$  в состояние  $S_{21}$  и из  $S_{20}$  в состояние  $S_{11}$ . Эти вероятности равны:

$$P_{10}^{21} = \int_0^\infty F_2(t, x_{B_2}) f_1(t, x_{B_1}) dt; P_{20}^{11} = \int_0^\infty F_1(t, x_{B_1}) f_2(t, x_{B_2}) dt,$$

где  $F_1(t, x_{B_1})$ ,  $f_1(t, x_{B_1})$ ,  $F_2(t, x_{B_2})$ ,  $f_2(t, x_{B_2})$  функции и плотности распределения СВ, определяющиеся на каждом шаге.

*Результаты моделирования следующие.* Исходными данными для моделирования служат ФР  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  и  $G_2(t)$ , распределенные по закону Эрланга второго порядка с параметрами  $v, \lambda, \mu$ . Причём

$$f_1(t) = \frac{v_1 v_2 (e^{-v_1 t} - e^{-v_2 t})}{v_2 - v_1},$$

где  $v_1 = 2.20204102$  (ч<sup>-1</sup>);  $v_2 = 21.79795896$  (ч<sup>-1</sup>).

$$f_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где  $\lambda_1 = 0.11010205$  (ч<sup>-1</sup>);  $\lambda_2 = 1.08989794$  (ч<sup>-1</sup>);

$$g_2(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{\mu_2 - \mu_1},$$

где  $\mu_1 = 1.33333333$  (ч<sup>-1</sup>);  $\mu_2 = 4.00000000$  (ч<sup>-1</sup>).

Математические ожидания времени обслуживания единицы продукции, наработки на отказ и восстановления соответственно равны:  $m_1 = 0.5$ ;  $m_2 = 10$ ;  $m_g = 1$ . Используя формулу (5.5) следствия 2, доказанной выше теоремы, находим нижние граничные значения  $x_{B_1}$  и  $x_{B_2}$ . Далее осуществляется поиск значений  $x_{B_1}^*$  и  $x_{B_2}^*$ , являющихся решениями системы

(7.1). Поиск может осуществляться одним из численных методов. В результате поиска получены следующие результаты:

$$x_{B_1}^* = 0.11713152, x_{B_2}^* = 2.34001510.$$

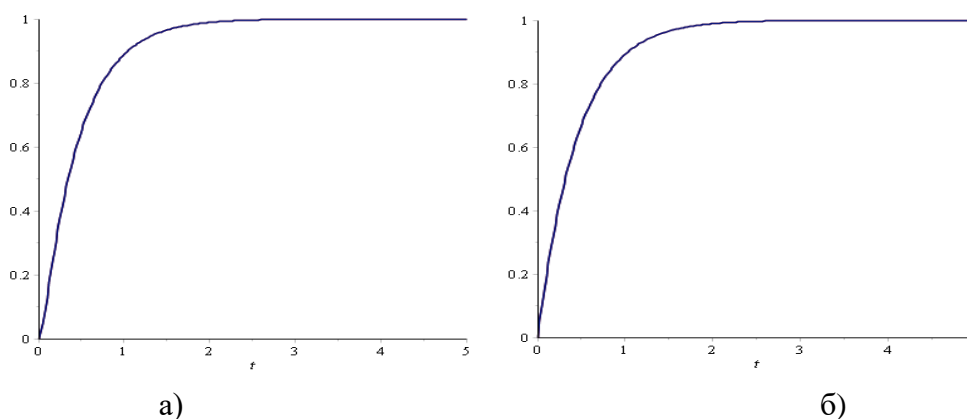
Полученные при этом вероятности переходов, а также значения  $\rho_i$  и  $\pi_i$  приведены в таблице 1. В этой же таблице приведены аналогичные параметры, рассчитанные классическим методом, а также относительная погрешность результатов. Проверка дополнительных условий показало следующее:

$$K_{Гд} = 0.90909090, K_{Г} = 0.90908918; m_{Гд} = 0.55000000, m_{Г} = 0.55000037.$$

Погрешности определения  $K_{Гд}$  и  $m_{Гд}$  соответственно равны:

$$\Delta K_{Гд} = 0.00018939\%, \Delta m_{Гд} = 0.00006728\%.$$

На рис. 4 приведены результаты моделирования функций  $\widehat{F}_{10}(t)$  и  $\widehat{F}_{20}(t)$  распределения времени пребывания в состояниях 10 и 20, полученные предлагаемым и классическим методами  $\widehat{F}_{20}(t)$ . Как видно из графиков, на каждом из них кривые полностью совпадают.



**Рис. 4.** Результаты моделирования функций  $\widehat{F}_{10}(t)$  и  $\widehat{F}_{20}(t)$  времени пребывания в состояниях (а)  $S_{10}$  и (б)  $S_{20}$  при использовании классического и предложенного метода

**Таблица 1**  
**Результаты моделирования классическим и предлагаемым методами**

Укрупнённые характеристики	Классический метод	Предлагаемый метод	Погрешность, %
$P_{20}^{11}$	0.98407416	0.98407462	0.00004696
$P_{20}^{21}$	0.01592583	0.01592537	0.00290639
$P_{10}^{11}$	0.95079629	0.95079530	0.00010389
$P_{10}^{21}$	0.04920370	0.04920469	0.00200822
$\rho_{10} = \rho_{11}$	0.47619301	0.47619003	0.00009339
$\rho_{20} = \rho_{21}$	0.02380952	0.02380996	0.00186785
$K_{Г}$	0.90909090	0.90908918	0.00018939
$m_{Г}$	0.55000000	0.55000037	0.00006728

**8. Заключение.** Подученные результаты сформулированы в следующем виде:

1. Как видно из таблицы 1 и рис. 4, результаты моделирования классическим и предлагаемым методами практически совпадают. Расхождение результатов пренебрежимо мало, что доказывает правильность предлагаемого метода.
2. Точность предлагаемого метода практически не ограничена.
3. К достоинствам метода можно отнести простоту его реализации.

4. В дальнейшем предполагается провести исследование других нерегенерирующих систем данным методом.

*Исследования выполнены при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 18-01-00392.*

### Литература

1. Корольюк В.С. Стохастические модели систем / Отв. ред. А.Ф. Турбин. Киев: Наук. думка. 1989. 208 с.
2. Корольюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надёжности систем. Киев: Наук. думка. 1982. 236 с.
3. I.A. Ushakov, Probabilistic Reliability Models (Wiley, 2012).
4. D.D. Yao, J.A. Buzacott, Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models// Management Science, 32 (1986) 890-905.
5. J. MacGregor Smith, B. Tan (Eds.), Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations (Springer-Verlag New York, 2013).
6. G.L. Curry, R.M. Feldman, Manufacturing Systems Modeling and Analysis, 2nd Edition (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011), p. 338.
7. N. Limnios, M. Nikulin, Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference, eds. N. Limnios, M. Nikulin (Springer Science+Business Media, New York, 2000), p. 514.
8. N. Limnios, G. Oprisan, Semi-Markov Processes and Reliability (Springer Science+Business Media, New York, 2001).
9. J. Jansen, N. Limnios (Eds.), Semi-Markov Models and Applications (Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 1999).
10. V.S. Korolyuk, A. Swishchuk, Semi-Markov Random Evolutions (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1995).
11. V.S. Korolyuk, N. Limnios, Stochastic Systems in Merging Phase Space (World Scientific, Imperial College Press, 2005).
12. D. Silvestrov, S. Silvestrov, Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes (Springer, Cham, 2017), p. 143.
13. M.V. Zamoryonov, V.Ya. Kopp, O.V. Chengar, Yu.L. Rapatskiy. Simulation of a single-component system using the trajectories method taking into account the scheduling preventive maintenance./ Cybernetics and Mathematics Applications in Intelligent Systems Proceedings of the 6th Computer Science On-line Conference 2017 (CSOC2017), Vol 2 / Springer International Publishing Switzerland 2017. – P. 264-271.
14. М.В. Заморёнов, В.Я. Копп, Д.В. Заморёнова, А.А. Скидан. Моделирование процесса функционирования обслуживающего устройства с необесценивающими отказами методом путей. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 7: в 2 ч. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016 с. 71-82.
15. Корольюк В.С. Фазовое укрупнение сложных систем / В.С. Корольюк, А.Ф. Турбин. – К.: «Вища школа», 1978. – 112 с.
16. Байхельт Ф., Франкен П. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
17. Копп В.Я. «Моделирование автоматизированных производственных систем». Монография / В.Я.Копп // Севастополь: СевНТУ, 2012 – 700с.

UOT 621.0:519.873

V.Y. Kopp, M.V. Zamoryonov, N.İ. Çalinkov

### Regenerasiya olmayan yarımmarkov sistemlərin faza iriləşdirilməsinin ədədi üsulu

*Regenerasiya olmayan yarımmarkov sistemlərin modelləşdirilməsinə dair yeni yanaşma tədqiq edilir. Bu yanaşma təklif olunan lemmaya və onun əsasında isbat olunan yarımmarkov sistemlərin kəsilməz vəziyyətlər altçoxluqunda qalması zamanının paylanması funksiyası haqqında teoremə əsaslanır. Adı çəkilən teorem imkan verir ki, vahid faza fəzasına malik olan sistemlərin iriləşdirilməsi yerinə yetirilsin. Modelləşdirmə iki növdə yerinə yetirilib: həm klassik, həm*

*də məqalədə təklif olunan üsulla. Modelləşdirmə nəticələrinin müqayisəsi hər iki üsulla əldə olunan nəticələrin üst-üstə düşməsini göstərdi.*

**Açar sözlər:** regenerasiya olmayan yarımmarkov sistemi, faza iriləşdirilməsi, bərpa prosesi, paylanma funksiyası, kəsilməz vəziyyət, qiymətdən salınmayan rədlər

**V.Ja. Kopp, M.V. Zamorynov, N.I. Chalenkov**

**The numerical method of the phase integration of non-regenerating semi-Markov systems**

*We consider a new approach to the modeling of non-regenerating semi-Markov systems based on the proposed lemma and the theorem, which was proved on this basis of the time distribution function for a semi-Markov system in a subset of continuous states, taking into account both the simple and complex recovery process. This theorem allows for the phase coherence of systems with a common phase space without a preliminary determination of the stationary distribution of the embedded Markov chain. To confirm the correctness of the proposed modeling method, an example of an analysis of the functioning of a non-regenerative system is given, which is taken as the service device in the presence of non-devaluating failures. The simulation is performed both by the well-known classical method and in the article. Comparison of simulation results showed almost complete coincidence.*

**Keywords:** non-regenerating semi-Markov system, phase coarsening; recovery process, distribution function, continuous states, unimpaired refusals