Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVIII, No.6, 2018
www.icp.az/2018/6-07.pdf

UOT 625.681.5

Ə.H. NAĞIYEV, F.A. ƏLIYEVA, H.Ə. NAĞIYEV

ÜMUMİ İSTEHSAL HƏCMİNƏ GÖRƏ CARİ İSTEHSAL İNTENSİVLİYİNİN PLANLAŞDIRMA PERİODU ÜZRƏ OPTİMAL BÖLÜŞDÜRÜLMƏ STRATEGİYASI HAQQINDA

Məlum paylanma funksiyasına malik hyəcanlandırıcı təsir altında olan statik optimallaşdırma məsələsinə baxılır. İdarə təsirinə inteqral məhdudiyyət şərtinin nəzərə alınması ilə istehsal intensivliyinin planlaşdırma periodu üzrə optimal paylanma strategiyasının müəyyən edilmə məsələsi qarşıya qoyulur. Göstərilir ki, əks əlaqəni həyata keçirən bir riyazi konstruksiyanın daxil edilməsi ilə məsələ optimallaşdırma və istehsal həcminin əldə edilmsi kriteriləri üçün çəki əmsallarının nəzərə alınması ilə idarə təsirinin riyazi gözləməsinin period üzrə stabil saxlanma məsələsinə gətirilə bilir. Əks əlaqə funksiyasının optimallığı üçün zəruri şərt müəyyən edilir. Test məsələsinin bir variantının ədədi həlli təhlil edilir.

Açar sözlər: planlaşdırmanın optimallaşdırılması, əks əlaqəli sistemlər, xammal məsrəflərinə inteqral tipli məhdudiyyət

1. Giriş. Fasiləsiz istehsal proseslərinin idarə olunmasında təsadüf edilən bir sıra məsələlər onunla fərqlənirlər ki, onlarda xarici həyəcanlandırıcı təsir altında olan statik keyfiyyət göstəricisinin optimallaşdırılması planlaşdırma periodunun sonunda istehsal həcminə tapşırıq qiymətinin yerinə yetirilməsi şərti daxilində həyata keçirilməli olur. Bir çox hallarda idarə təsiri həyəcanlandırıcı təsirlə bilavasitə funksional asılılıqda olur ki, buna parlaq nümunə kimi xammalın keyfiyyətindən asılı olaraq məhsul keyfiyyətinin yüksək saxlanılması üçün istehsalın cari intensivliyinin aşağı salınmasına yaranan zərurəti göstərmək olar. İdarə təsirinə (istehsalın sari intensivliyinə) periodun sonu üçün müəyyən olunmuş inteqral məhdudiyyət şərtinin təmin olunması zərurəti və xarici həyəcanlandırıcı təsirin mövcudluğu sadə mövqe idarəetmə statika məsələsini stoxastik idarəetmə məsələsinə çevirmiş olur [1, s.12; 2, s.9; 3, s.199].

Bu tip məsələlərə ehtiyatların idarə edilmə sferasında, verilmiş resursların nəzərə alınmasını ehtiva edən kütləvi xidmət məsələlərində tez-tez təsadüf edilir. Praktiki tətbiqinin bu qədər geniş olmasına baxmayaraq, məhz bu məsələnin analizinə həsr olunmuş araşdırmalara elmi ədəbiyyata rast gəlinmir. Bu məsələni, əgər idarə təsirinə inteqral məhdudiyyət nəzərə alınmazsa, mövcud təsnifata uyğun olaraq statik optimallaşdırmanın mövqe idarəetmə məsələləri sinfinə aid etmək lazım gəlir. Məhz bu halda idarəetmə strategiyasının təyin edilmə məsələsi idarə təsirinin həyəcanlandırıcı təsirlə statik asılılıqla əlaqələndirilmə məsələsi kimi sadə şəkil alır. İdarə funksiyasına inteqral məhdudiyyətin mövcud olması məsələyə dinamik mahiyyət gətirir və onu məlum, və ya naməlum statistik xarakteristikaya malik həyəcanlandırıcı təsirli stoxastik idarəetmə məsələsinə çevirir [4, s.408; 5, s.562]. Bu məsələlərin həllinə ümumi yanaşma idarə strategiyasının həyəcanlandırıcı təsirin statistik xarakteristikaları ilə əlaqələndirilərək əks əlaqə mexanizminin tətbiqi istiqamətindədir [6, s.233]. Bu zaman meydana çıxan əsas məsələlərdən biri kimi, bir qayda olaraq, əks əlaqənin rasional strukturunun seçilməsi diqqət mərkəzində yerləşir.

Baxılan işdə belə struktur olaraq bir əks əlaqə funksiyası təklif olunur ki, onun konstruktiv quruluşu planlaşdırma periodunun sonunda istehsal həcminin verilmiş tapşırıq qiymətinin təmin olunmasına bilavasitə xidmət edir. Fərqli cəhət odur ki, burada əks əlaqənin dərinliyinə optimallaşdırılan funksiya kimi baxılır və onun sintezi həm həyəcanlandırıcı təsir faktorunun statistik göstəriciləri, həm də məsələnin şərtləri ilə müəyyən olunan variasiya məsələsinin tərtib olunmasını və həllini tələb edir.

2. Məsələnin qoyuluşu.

Əks əlaqəli statik optimallaşdırma.

Fərz edək ki, istehsal olunan məhsulun keyfiyyətini əks etdirən funksiya verilmişdir:

$$F = F(x, u) \tag{2.1}$$

harada ki, $x -$ paylanma funksiyası $y = \varphi(x)$ kimi məlum olan həyəcanlanırıcı təsir; $u -$ idarə təsiridir: $u \in U; U = \{u: u_1 \leq u \leq u_2; u_1 > 0\}$. İstehsalın cari intensivliyi olan idarəetmə, planlaşdırma periodu $t \in (0, T)$ ərzində G həcmdə xammal emalını həyata keçirməlidir:

$$\int_0^T u(t)dt = G \tag{2.2}$$

Tutaq ki, (2.1) keyfiyyətinin $t \in (0, T)$ cari zaman anında tapşırığın nəzərə alınması ilə idarə edilmə qaydası (əks əlaqə mexanizmi) qabaqcadan verilmişdir:

$$u[x(t), L(t)] \equiv arg\max_{\tilde{u} \in U}\left\{F[x(t), \tilde{u}] - L(t)\left(\tilde{u} - \frac{G - \int_0^t u(\tau)d\tau}{T - t}\right)^2\right\}, \tag{2.3}$$

harada ki, $u[x(t), L(t)] -$ həyəcanlandırıcı təsirin bir realizasiyası və qabaqcadan hesablanmış $L(t)$ cərimə funksiyası ilə təyin edilən idarəetmə; $\tilde{u} -$ variasiya olunan dəyişəndir.

Optimallıq və yetməklik kriterilərinin çəki nisbətlərini ifadə edən α_0^*, α_1^* əmsalları da məsələnin ilkin verilənləri kimi məlum kəmiyyətlərdir, $\alpha_0^* + \alpha_1^* = 1$.

(2.3) düsturunda

$$\frac{G - \int_0^t u(\tau)d\tau}{T - t}$$

ifadəsi cari istehsal intensivliyinin t zaman anında orta göstərici $\frac{G}{T}$ $-$dən meyletməsini ifadə edir.

Cərimə funksiyası $L(t) \geq 0$ əks əlaqənin dərindiyinin zaman üzrə idarə edir.

Bu funksiyanın opimal variantının seçilməsi ilə verilmiş çəki nisbətlərində keyfiyyət və yetməklik kriterilərinin qarşılıqlı nizamlanması təmin edilməlidir.

Təklif olunan (2.3) qaydasının effektivliyi aşağıakı ifadə ilə müəyyən olunan ΔF fərqinin mütləq qiymətindən asılıdır:

$$\Delta F = \int_0^\infty \varphi(x)\left[\max_{u \in U} F(x, u) - F\left(x, \frac{G}{T}\right)\right]dx; \forall\varphi(x), \Delta F \geq 0;\ \frac{G}{T} \in U$$

Bu fərq nə qədər böyük olursa, əks əlaqənin tətbiqindən alınan effekt daha çox hiss olunandır.

Nəhayət, qeyd edək ki, əks əlaqənin tətbiqindən alınan yüksək effekt, bilavasitə T/τ nisbətinin kifayət qədər böyük olmasını tələb edir ki, burada $\tau -$ təsadüfi $x(t)$ üçün avtokorelyasiya funksiyasının sönmə müddətini ifadə edir.

Əks əlaqə funksiyası $L(t)$-nin seçilməsində optimallıq prinsipi.

İxtiyari $L(t)$ üçün idarəetmə xətasını

$$E\big[u[x(t), L(t)]\big] \equiv m_{\tilde{u}}(L, t)$$

maksimallaşdırıcı idarəetmənin dəyişmə dinamikasına görə təhlil edək. Bunun üçün idarə olunmayan dərinlikli, yəni zaman üzrə sabit $L(t) \equiv const = L$ əks əlaqəli prosesi nəzərdən keçirək. Sadəlik üçün $t \in (0, T)$ zaman ölçüsünün diskret variantını qəbul edək: $t_n; n = 1, 2, \cdots, N$.

Fərz edək ki, $y_n = \varphi(x_n); x_n \in [0, \infty]$ paylanmasının tərs funksiyası mövcuddur və birqiymətli olaraq təyin olunmuşdur:

$$x_n = \varphi^{-1}(y_n); y_n \in (0, y_{max}), \tag{2.4}$$

harada ki, $y_{max} -$ paylanma funksiyasının maksimumudur.

Alınmış (2.4) ifadəsini (2.3)-də nəzərə almaqla maksimallaşdırıcı idarəetmənin riyazi gözləməsini sabit L qiyməti üçün aşağıdakı kimi yazaq:

$$m_{\hat{u}}(L, t_n) = \int_0^{y_{max}} y \cdot arg \max_{u \in U} \{F[\varphi^{-1}(y), u] - L[g(t_n)]^2\} \, dy; \;\; n = \overline{0, N-1}. \quad (2.5)$$

Bunun üçün $t \in [0, T]$ intervalının kifayət qədər geniş olduğu, yəni T/τ nisbətinin böyük ədəd olduğu qəbul olunmalıdır ki, $x(t_n); n = \overline{1, N}; \;\; t_1 = 0; t_N = T$ realizasiyasının empirik paylanma funksiyasının əldə edilməsini mümkün edəcək qədər dolğun statistik materialı əhatə etdiyi qəbul edilə bilsin.

Diqqət yetirək ki, L-in ixtiyari və sabit olduğunun nəticəsi olaraq t_n zaman anlarında opimallaşdırmadan alınan nəticələrə görə riyazi gözləmə $m_{\hat{u}}(L, t_n)$; $n = \overline{1, N}$ istehsalın orta intensivlik göstəricisi *G/T* -dən fərqli olacaqdır. Bu fərq $t_n \to T$ müddətində toplanaraq $\varepsilon(t_n) = \int_0^{t_n} \left(m_{\hat{u}}(L, \xi) - \frac{G}{T} \right) d\xi$ meyletməsini yaradacaqdır. Başqa sözlə, riyazi gözləmə zamanın funksiyası-na çevrilmiş olacaqdır. Bu səbəbdən stasionar həyəcanlandırıcı təsir şəraitində idarəetmə strategiyasının zamana görə dəyişməzliyi şərti pozulmuş olacaqdır. Bu meylin aradan götürülməsi, təbii, tələb edir ki, müəyyən zaman ardıcıllığında riyazi gözləmə $m_{\hat{u}}(L, t_n)$-nin sabit qalmasını təmin edən *L(t)* funksiyasının hesablanması kimi tərs məsələ tərtib olunub, həll edilsin. Beləliklə, aşkar görünür ki, *L(t)* − funksiyasının sintezi $m_{\hat{u}}(L, t_n)$ riyazi gözləməsinin $\frac{G}{T}$ qiyməti ətrafında stabil-ləşdirmə məqsədini daşıyır.

L(t) funksiyasının köklənmə məsələsində optimallıq prinsipini aşağıdakı kimi ifadə etmək mümkündür:

$$\frac{d}{dt} m_{\hat{u}}[L^{opt}(t), t] \equiv 0;$$

$$m_{\hat{u}}[L^{opt}(t), t] \equiv \frac{G}{T}$$

Hər iki kriteri üçün α_0^*, α_1^* çəki əmsallarının da nəzərə alınması ilə aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$m_{\hat{u}}[L^{opt}(t), t] = \alpha_0^* u_{l=0}^{max} + \alpha_1^* u_{l=\infty}^{max} = \alpha_0^* u_{l=0}^{max} + \alpha_1^* \frac{G}{T} \;\; ,$$

harada ki, $u_{l=0}^{max}$; $u_{l=\infty}^{max}$ − uyğun olaraq ayrılıqda sırf optimallaq kriterisininə və sırf yetməklik kriterisinə görə optimal idarənin riyazi gözləməsinin iki kritik qiymətini göstərir.

İdarəetmə strategiyasının düsturu.

Qeyd edək ki, (2.5) funksiyasının öz arqumentlərinə görə hamar olması, ehtimalların paylanmasının tərs funksiyası üçün $\int_0^{y_{max}} \varphi^{-1}(y) \, dy = 1$ ifadəsinin hər zaman ödənilməsi bu funksiyanın maksimumunun mövcud olmasını təmin edən əsas şərtlərdir. Bu funksiya əsasında maksimallaşdırıcı idarəetmənin $m_{\hat{u}}(L, t_n)$; $n = \overline{1, N}$ riyazi gözləməsinin əldə olunmasında hesablama xarakterli çəinlik mövcud deyildir. Bunları nəzərə alaraq məsələnin qoyuluşunu aşağıakı kimi tərtib etmək mümkündür:

$x(t); \in (0, T)$ təsadüfi funksiyasının stasionar proses olduğunu və $T \gg \tau$ şərtinin ödənildiyini əsas qəbul edərək, $L^{opt}(t_n)$ funksiyasının (2.3) idarəetmə qaydası mənasında elə optimal variantı təyin edilməlidir ki, nəticədə (2.5) ifadəsinə görə təyin olunmuş riyazi gözləmənin

$$m_{\hat{u}}[L^{opt}(t_0), t_0] = \alpha_0^* u_{l=0}^{max} + \alpha_1^* u_{l=\infty}^{max} \quad (2.6)$$

başlanğıc qiyməti ətrafında və $t \in (0, T)$ intervalında sabitliyi təmin olunsun, yəni:

$$\min_{L \geq 0} [m_{\hat{u}}[L, t_{n+1}] - m_{\hat{u}}[L(t_n), t_n]^2; n = \overline{1, N-1} \quad (2.7)$$

3. L(t) funksiyasının normallaşdırılması.

Qəbul edilmiş (2.3) funksiyasında ayrı-ayrılıqda keyfiyyət və (2.2) inteqralına görə yetməklik kriteriləri üçün normallaşdırma şkalaları daxil edək. Bu məqsədlə e^{qua}, e^{acc} və l, parametrləri daxil edək. Belə ki, keyfiyyət kriterisi üzrə:

$$\mu_2 = \left[\max_{\substack{x=E(X)\\ u\in U}} F(x,u) - \min_{\substack{x=E(X)\\ u\in U}} F(x,u) \right]^{-1}$$

Yetməklik kriterisi üzrə:

$$\mu_1 = \left[arg \max_{\substack{x=E(X)\\ u\in U}} F(x,u) - arg \min_{\substack{x=E(X)\\ u\in U}} F(x,u) \right]^{-2}$$

normallaşdırıcı əmsallar daxil edilir. Bu əmsallarda $E[X]$ riyazi gözləmə, $X -$ həyəcanlandırıcı faktoru xarakterizə edən statistika toplusudur.

Normallaşdırılmış əks əlaqə funksiyasını $l(t)$ ilə işarə edək:

$$l(t) = L_0 L(t),$$

harada ki, $L_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

4. Məsələnin xarakteristik parametri.

Cari intensivliyi ifadə edən u dəyişəninin riyazi gözləməsi L-nın iki kritik qiyməti $l(t) \equiv 0$; və $l(t) \equiv \infty$ üçün asanlıqla ifadə oluna bilər. Birinci hal istehsal həcminə məhdudiyyətin qoyulmadığı hala müvafiqdir. İkinci halda məhsulun keyfiyyəti nəzərə alınmır. Bu kritik qiymətləri aşağıdakı ifadələrlə qeyd edək:

$$u_{l=0}^{max} = \int_0^{y_{max}} y \cdot \left\{ arg\max_{u\in U} F(\varphi^{-1}(y), u) \right\} dy;$$

$$u_{l=\infty}^{max} = arg \min_{u\in U} \left(u - \frac{G - \int_0^t u(\tau)d\tau}{T - t} \right)^2 = G/T.$$

Uzlaşmazlıq parametri adlandıracağımız aşağıdakı fərqi daxil edək:

$$\delta = u_{l=0}^{max} - u_{l=\infty}^{max} \quad .$$

Bu parametr baxılan məsələlər üçün mühüm xarakteristika olaraq sabit əks əlaqə əmsallı test məsələlərinin həllində, yəni $l(t) = const$ götürülən variantlarda öz təsirini qabarıq şəkildə göstərir. Aşağıdakı model məsələsi nümunəsində bunu göstərək:

$$F = \frac{1}{1+\alpha x^u} ;0.5 < u < 2;\ 0 < x < \infty, \tag{4.1}$$

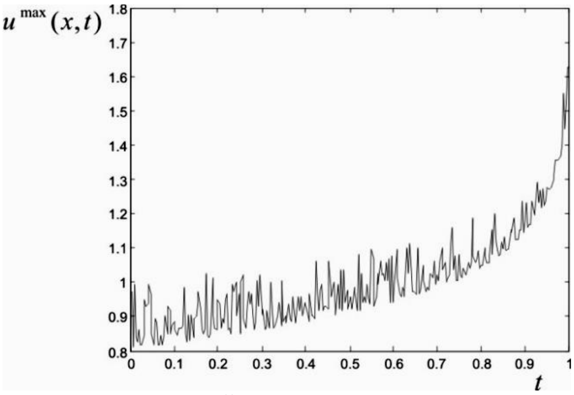
harada ki, $\alpha = 1; G = 3; T = 1;\ \alpha_0 = \alpha_1$=0.5 .

Təsadüfi siqnal $\varphi(x)\frac{1}{b}e^{-\frac{x}{y}} -$ eksponensial paylanma funksiyasına malikdir ki, onun tərs funksiyası aşağıdakı kimi yazılır:

$$x = \varphi^{-1}(y) - b\ln b - b\ln y; y \in (0, b].$$

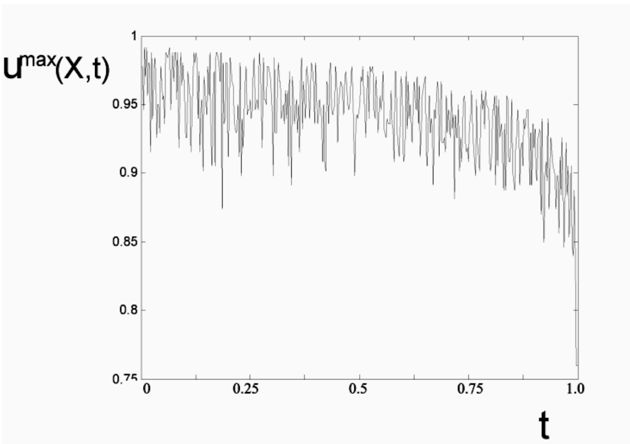
Model məsələnin həlli hesablama eksperimenti əsasında parametrlərin müxtəlif qiymətlərində əldə edilmiş, empirik təhlil aparılmışdır. Variantların birində qəbul edilmiş parametrlərin qiymətləri aşağıdakılar olmuşdur: $b = 1,$ əks əlaqə əmsalının normallaşdırılmış qiyməti $l_0 = 4.2;\ \alpha = 0.5; G = 2; T = 1;\ u_{l=0}^{max} = 0.76;\ u_{l=\infty}^{max} = 2;\ \delta = -1.24.$

İdarə olunmayan əks əlaqə rejimində, yəni $l(t) \equiv 1$ olduqda maksimallaşdırıcı idarə təsirinin ossilloqramı şək.1-də göstərilmişdir. Bu ossilloqram idarə təsirinin orta qiymətinin intervalın sonuna yaxınlaşdıqca artım istiqamətində hiss olunacaq trendini nümayiş etdirir. Bu meyletmə maksimallaşdırıcı idarə təsirinin period üzrə yığılıb, toplanan $\varepsilon(t_n) = \frac{G}{T} - m_{\hat{u}}(l, t_n)$ mənfi meyletməsinin səbəbi olaraq meydana çıxmışdır. Effektivlik funksiyası (2.3) əvvəlcə *G* kəmiyyətinə yetməklik kriterisindən daha çox (2.1) keyfiyyət göstəricisinə qarşı həssasdır. İntervalın əvvəlində maksimallaşdırıcı idarəetmə təsirinin böyük amplituda malik olması bunu sübut edir. Periodun sonuna yaxınlaşdıqca, terminal hissədə geriqalmaların "aradan qaldırılması" effekti müşahidə olunur. Bu zaman ossilyasiyaların amplitudunun kiçilməsi, orta qiymətin isə kəskin artması müşahidə olunur. Xarici həyəcanlanırıcı təsir olan *x(t)* funksiyasının imitasiyası verilmiş paylanma funksiyasını realizə edən təsadüfi siqnal generatoru vasitəsi ilə əldə edilmişdir. Apardığımız hesablama eksperimentində bununla əlaqədar olaraq ossilyasiya yaradan elementin [0,1] zaman intervalında 4237 dəfə işə qoşulması baş vermişdir. Şək.1-də *x(t)* təsadüfi siqnalının (4.1) modeli ilə bağlı əks əlaqəli sistemdə yaratdığı prosesin ossilloqramı öz əksini tapmışdır.



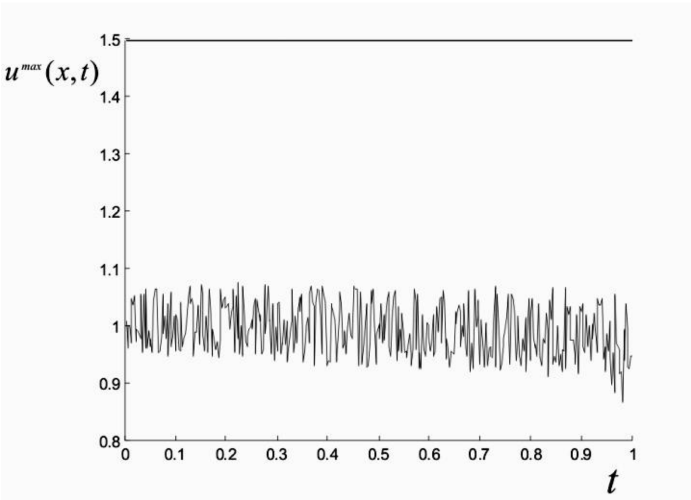
Şək. 1. Paylanma funksiyası $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{y}}$ olan təsadüfi siqnal təsiri altında (4.1) məsələsinin $l(t) = 1;\ \delta < 0\ ; \delta < 0$ şərtləri daxilində əldə edilmiş prosesin ossilloqramı

Xarakteristik parametrin müsbət olduğu halda, yəni $\delta = 0.16;\ u_{l=0}^{max} = 1.16;\ u_{l=\infty}^{max} = 1$ şərtlər daxilində yuxarıda göstərilənlərə tam əks proses müşahidə olunur. Hesablama eksperimentinin bu variantında bütün digər parametrlərin dəyişilməz qalması ilə iki parametr dəyişdirilmişdir: $G = 1;\ \alpha = 1.5$. Bu halda $\delta = 1$ olduğu ilə əlaqədar məhz həmin maksimallaşdırıcı $u^{max}(x,t)$ funksiyasının orta qiymətinin periodun sonuna yaxınlaşdıqca, əksinə, aşağı düşməsi özünü göstərir (şək.2).



Şək.2. Əks əlaqə əmsalının sabit qaldığı halda və $l(t) = 1$ və $\delta > 0$ olduqda müşahidə olunan proses

Şək.3-də xarakteristik parametrin sıfır qiymətində ($\delta = 0$) (19) modelində əks əlaqənin həyata keçirildiyi prosesin ossilloqramı göstərilmişdir. Belə ossilyasiyalı prosesi zahirən optimal hesab etmək mümkün olsa da, bu yalnız xarakteristik parametrin bir seçilmiş qiymətində, yəni $u_{l=0}^{max} = 1.16$; $u_{l=\infty}^{max} = 1.16$; $G = 1.16$ olduqda özünə yer tapa bilir. Təbii ki, həmin stabil orta qiymətli prosesin δ-nın ixtiyari qiymətində əldə edilməsi yalnız optimal $l^{opt}(t)$ əks əlaqə funksiyasının sintezini tələb edir.



Şək.3. Xarakteristik parametrin sıfır qiymətində və $\delta = 0$ və $l(t) = 1$ sabit əks əlaqə rejimində əldə olunan maksimallaşdırıcı proses

5. $l^{opt}(t)$ funksiyasının əsas xassəsi (optimallığın zəruri şərti).

Əks əlaqə əmsalı l-in sabit götürüldüyü halda $m_{\hat{u}}(l, t_n)$ funksiyasının keyfiyyətcə özəl xassələri δ-nın müxtəlif işarəli qiymətlərində özünü parlaq surətdə göstərir.

Həmin funksiyanın diskret $t_n; n = 0,1,2,\cdots,N$ zaman anlarında aldığı qiymətləri E_n ilə işarə edək:

$$E_0 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G}{T};$$
$$E_1 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G - E_0 \cdot h_0}{T - h_0};$$
$$E_1 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G - (E_0 \cdot h_0 + E_1 h_1)}{T - (h_0 + h_1)}; \tag{5.1}$$
$$E_1 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{G}{T} - \varepsilon_i\right) h_i}{T - \sum_{i=0}^{n-1} h_i}$$

harada ki, $\varepsilon_i = \frac{G}{T} - E_i; i = \overline{1,n}$ cari meyletmələri, $\alpha_0, \alpha_1 -$ əks əlaqə əmsalı ilə müəyyən olunan çəki əmsallarını ifadə edir. İxtiyari götürülmüş $l(t) \equiv l_1; 0 < l_1 < \infty$ əmsalı üçün: $\alpha_0 = \frac{1}{l+1}$; $\alpha_1 = \frac{l}{l+1}$.

$Lemma$. (5.1) sistemini ilə təyin olunan E_n ardıcıllığı $\delta < 0$ olduqda monoton artan, $\delta > 0$ olduqda – monoton azalandır.

İsbatı. Ayrılıqda δ-nın müxtəlif işarəli variantları üçün (5.1) münasibəti ilə bağlı olan E_n ardıcıllığının xarakterini təhlil edək.

I. $\delta < 0$. Aşkardır ki, (5.1) ifadəsinin birinci sətrindən $E_0 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G}{T}$; və ondan isə $\delta < 0$ şərtinə görə $E_0 < \frac{G}{T}$ alınır. Yəni başlanğıc $n = 0$ nöqtəsi üçün, $\varepsilon_0 > 0$ olduğu müəyyən olunur. İndi fərz eək ki, $n = 1$ addımında, sistemin ikinci sətir ifadəsində $\varepsilon_0 = 0$ qiyməti mövcud olmuşdur. Bü yalnız $E_1 = E_0$ bərabərliyinin ödənilməsi zamanı mümkün ola bilərdi. Lakin $\varepsilon_0 > 0$ şərti $E_1 < \frac{G}{T} -$

bərabərsizliyinin mövcudluğunu göstərir, buradan isə $E_1 > E_0$ şərtinin ödənildiyi sübut olunur. Bu induksiyanı bütün rekurrent (5.1) ifadələrinə şamil edərək, qeyd etmək olur ki, ixtiyari E_n ardıcıllığı $E_{n+1} > E_n$ şərtini ödəyir, yəni ardıcıllıq monoton artandır.

II. $\delta > 0$. Bu halda, $E_0 = \alpha_0 u_{l=0}^{max} + \alpha_1 \frac{G}{T}$ ifadəsindən $\delta < 0$ şərtinə görə $E_0 > \frac{G}{T}$ alınır. Hər bir mənfi işarəli meyletmə parametri $\varepsilon_0 < 0$ bu halda $E_0 < \frac{G}{T} -$ bərabərsizliyinin və onun isə, $E_1 < E_0$ şərtinin ödənildiyi sübut edir. Beləliklə də $E_{n+1} < E_n$ şərti ödənilir, yəni ardıcıllıq monoton azalandır.

Lemma isbat olundu.

Zaman üzrə dəyişən $E(t) = m_{\hat{u}}(l_1, t)$ funksiyası üçün aşkar olunmuş həmən xassə optimal $l^{opt}(t)$ funksiyasının zaman üzrə dəyişmə dinamikasının mühüm əlamətinin əldə edilməsinə xidmət edir. B əlamət zəruri şərt olaraq, aşağıdakı müddəa kimi ifadə oluna bilər.

Teorem (optimallığın zəruri şərti). $m_{\hat{u}}(\cdot, t)$ riyazi gözləməsinin zaman üzrə stabilliyini təmin edən optimal əks əlaqə funksiyası $l^{opt}(t)$, xarakteristik funksiya δ-nın işarəsindən asılı olmayaraq $t \in (0, T)$ intervalında monoton azalan funksiyadır:

$$\frac{d}{dt} l^{opt}(t) < 0, \forall t \in (0, T] \quad . \tag{5.2}$$

İsbatı. Axtarılan funksiyanın ixtiyari bir $\tilde{l}$ qiymətini qeyd edib, $m_{\hat{u}}(\tilde{l}, t)$ funksiyasını nəzərdən keçirək. Həmin qiymət ətrafında diferensial tərtib edək: $E_1(\tilde{l}) = E(\tilde{l},\, t + dt) - E(\tilde{l},\, t)$. Tutaq ki, $\delta < 0$. O zaman lemmaya görə maksimallaşdırıcı idarəetmənin riyazi gözləməsi E-nin zaman üzrə dəyişməsi müsbətdir, yəni $\mathrm{d}E_t(\tilde{l}) > 0$. Baxılan məsələdə optimallaşdırma prinsipi olaraq $m_{\hat{u}}(\tilde{l}, t)$ funksiyasının stabilliyi olduğuna diqqət yetirməklə, bu artımın kompensasiya olunması üçün əks əlaqə əmsalının həmən $\tilde{l}$ nöqtəsində elə $dl(t)$ artımını müəyyən edək ki, o, zamana görə artımı kompensasiya etmiş olsun:

$$dE_l(t) = E(\tilde{l} + dl\,(t), t) - E(\tilde{l}, t) = -\mathrm{d}E_1(\tilde{l}) < 0. \tag{5.3}$$

Hər iki törəmələr üçün $\delta < 0$ olduğu halda $\frac{\partial E(l,t)}{\partial l} > 0, \forall t \in (0, T]$ və $\frac{\partial E(l,t)}{\partial t} > 0, \forall t \in [0, \infty)$ ifadələrinin doğru olduğunu (riyazi gözləmənin monoton artması haqqında lemmanın müddəasını) əsas götürərək, (5.3)-də diferensialların işarələrinin mürəkkəb olmayan analizi $dl(t) < 0$ olduğunu göstərir.

İndi $\delta > 0$ halını götürək. Bu zaman $\frac{\partial E(l,t)}{\partial l}, \frac{\partial E(l,t)}{\partial t} < 0$ şərti ödənilir və $dE_t = 0$ stabillik əlamətinin bərpa olunması üçün l üzrə elə artım müəyyən etmək lazım gəlir ki, $dE_l(t) = -dE_t(\tilde{l}) > 0$ təmin oluna bilsin. Yenə də diferensialların analoji analizi $dl(t) < 0$ doğruluğu qənaətinə gətirir.

Xarakteristik parametr δ -nin hər iki işarəli qiymətlərində həm l, həm də t ixtiyari qəbul edilmiş olduqlarından teoremin müddəasının doğru olduğu isbat edilmiş olur.

6. $l^{opt}(t)$ funksiyasının sintezi.

$l^{opt}(t)$ funksiyası üçün isbat olunmuş (5.2) zəruri şərti həmin funksiyanın hər hansı bir analitik yolla sintez etmə potensialına malik deyildir. Bununla belə, həmin şərtdən istifadə edərək $l^{opt}(t)$ funksiyasının bu, və ya digər riyazi proqramlaşırma metodu əsasında sintezini həyata keçirən alqoritmlərinin təkmilləşdirilməsi üçün müvəffəqiyyətlə istifadə etmək mümkündür. Bunu aşağıdakı nümunədə göstərmək olar.

Optimallaşdırılan $l^{opt}(t)$ funksiyasının bir yaxınlaşması kimi eksponensial funksiyalar sinfindən olan aşağıdakı monoton azalan funksiyanı seçək:

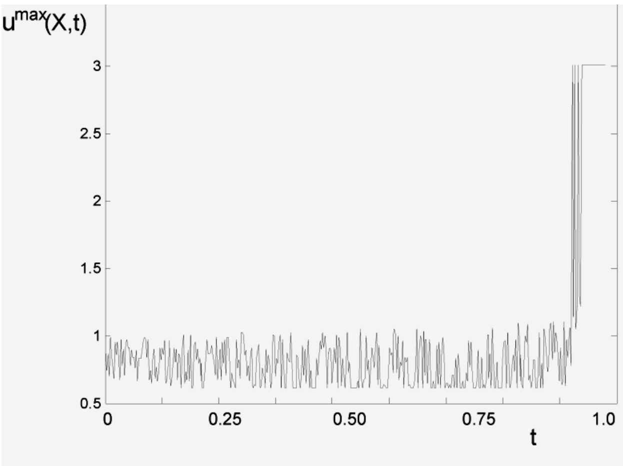
$$l^{opt}(t) = l^* e^{-\beta t} \tag{6.1}$$

harada ki, $l^* > 0$ məsələnin şərtinə əsasən hesablanan kəmiyyət; $\beta > 0 -$ approksimasiya olunan parametrdir. Onların $l^{opt}(t)$ funksiyasının təyin olunma intervalının kənarlarında aldığı qiymətlər aşağıdakı kimi təyin oluna bilərlər:

$$l^* = l^{opt}(0) = arg \max_{l\epsilon(0,\infty)} \left[m_{\hat{u}}(l, t_0) - \alpha_0^* u_{l=0}^{max} - \alpha_0^* \frac{G}{T} \right]^2, \ \beta = \frac{1}{T} \ln \frac{l^{opt}(0)}{l^{opt}(T)} . \qquad (6.2)$$

harada ki, $m_{\hat{u}}(l, t_0)$ ifadəsi (2.5) düsturu əsasında yazılmışdır. Bu zaman $l^{opt}(T)$ qiymətini isə, birbaşa üsullarla yaxınlaşma alqoritmlərinin tətbiqi ilə əldə etmək nəzərdə tutulur.

Şək.4-də (6.1), (6.2) düsturları əsasında hesablanmış $l^{opt}(t)$ proqram idarəetmə prosesinin bir realizasiyası göstərilmişdir. İstifadə olunmuş model məsələsinin parametrləri dəyişməz olaraq saxlanılmışdır. Bu halda $u^{max}(x, t)$ maksimallaşdırıcı idarəetməsinin zamana görə kifayət qədər stabilliyinin əldə olunmasına baxmayaraq, intervalın sonunda riyazi gözləmənin kəskin artdığı müşahidə olunmuşdur.



Şək.4. (4.1) məsələsi üçün $l^{opt}(t) = l^* e^{-\beta t}$ approksimasiya edici funksiyasından istifadə olunduğu halda $u^{max}(x, t)$-in üçün əldə olunmuş ossilloqram

Məsələnin həllində göstərilən keyfiyyət xarakterli qeyri-korrektliyin meydana çıxmasının səbəbi $l^{opt}(t)$ approksimasiyası üçün (6.1) strukturunun seçilməsində yol verilən sərbəstlik (ixtiyarilik) olmuşdur.

Qeyd edək ki, (5.2) zəruri şərtinin məsələnin imitasiya modelləşdirilməsi yolu ilə həllində istifadə olunması müsbət effekt verir. İmitasiya modelləşdirməsi metodundan istifadə edildikdə həyəcanlanırıcı təsir faktorunun simulyasiyası verilmiş paylanma funksiyası əsasında həyata keçirilir. Bu zaman $l(t)$ strategiyasının optimal variantı birbaşa üsullar əsasında seçmə alqoritmlərinin köməyi ilə yaradılır. Məhz (5.2) şərtinin irəli sürülməsi ilə optimallığa iddialı ola biləcək variantların sayı kəskin surətdə azaır.

Nəhayət, qeyd edilməlidir ki, qarşıya qoylmuş məsələnin həlli bilavasitə $l^{opt}(t)$ strategiyasının sintezi iterasiya metoduna istinad olunaraq da əldə oluna bilər. Lakin bu sahədə sınaqdan keçirilmiş bəzi test məsələləri iterativ hesablama prosesinin dayanıqsızlığı ilə qarşılaşmışdır. İterasiya prosesi (2.7) düsturu əsasında aşağıakı şəkilə tərtib olunur:

$$l^{opt}(t_{n+1}) = arg \min_{l \geq 0} \left[m_{\hat{u}}[l, t_{n+1}] - m_{\hat{u}}[l, (t_n), t_n \,] \right]; \ n = \overline{1, N} \qquad (6.3)$$

Burada $m_{\hat{u}}[l(t_0), t_0]$ yaxınlaşmasını yenə də (2.6) düsturundan istifadə etməklə əldə etmək mümkünür.

(6.3) düsturunda $m_{\hat{u}}[l(t_n), t_n], n = \overline{1, N}$ qiymətlərinin əldə olunmasında $g(t_n)$ funksiyasının hesablanması aşağıdakı stoxastik approksimasiya əsasında yerinə yetirilə bilər:

$$g(t_n) = \frac{G - \sum_{i=1}^{n} m_{\hat{u}}[l(t_i), t_i](t_i - t_{i-1})}{T - t_n}; n = \overline{1, N}$$

Və sonda qeyd edək ki, $m_{\hat{u}}[l(t_n), t_n]$ ifadələrinin hesablanmasında özünü göstərən bir əlverişsiz şərait $x = \varphi^{-1}\,(y)$ tərs funksiyasının birqiymətlilik xassəsinin bir çox hallarda daşımaması ola bilir. Lakin belə hallarda müvəffəqiyyətlə istifadə olunan funksiyanın intervallar üzrə hissə-hissə nəzərdən keçirmə praktikası burada da axtarılan riyazi gözləmənin əldə olunmasında hesablama xarakterli bütün çətinlikləri aradan qaldıra bilir.

7. Nəticə. İstehsalın cari intensivliyinin verilmiş plan tapşırığı əsasında həyəcanlandırıcı təsirin nəzərə alınması ilə optimal idarə olunması məsələsi orta intensivlik göstəricisindən meyletməyə nəzərən əks əlaqə yaradılma prinsipindən istifadə olunmaqla həll edilə bilər. Bu zaman pozision (mövqe) idarəetmə həyəcanlandırıcı təsirin paylanma funksiyası, keyfiyyət funksiyası və məsələnin digər şərtlərinin də daxil olması ilə maksimallaşdırıcı idarə təsirinin riyazi gözləməsinin period üzrə stabil saxlanılmasını strateji xətt kimi əsas götürür. Bu xətti təmin edən optimal əks əlaqə funksiyası üçün əldə olunmuş zəruri şərt bilavasitə onun sintez olunmasını təmin edə bilməsə də, riyazi proqramlaşdırma metodlarının əsasında onun birbaşa üsullarla təyin olunmasına əlverişli zəmin ola bilir. Planlaşdırma periodu kifayət qədər geniş müddəti əhatə edirsə, yəni bu müddətin həyəcanlandırıcı təsirin avtokorelyasiya funksiyası ilə müqayisədə çox böyük ədəd təşkil etdiyi hallarda məsələnin həllinin yüksək effektivliyi təmin oluna bilir.

Ədəbiyyat

1. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
2. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. М.: Советское радио, 1979.
3. Гилл Ф., Мюррей. У. Численные методы условной оптимизации. М.: Мир, 1977.
4. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003, 583 с.
5. Александров В. М. Оптимальное по расходу ресурсов управление линейными системами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. №4 . с.562–579.
6. Летов А. М., Математическая теория процессов управления, М.: Наука. 1981.

A.G. Nagiev, F.A. Aliyeva, H.A. Nagiyev

On the strategy of managing the current intensity of production for a given output volume

The problem of optimizing a static system that appears to be a certain quality function that is under the influence of an external perturbation is considered. The existence of an integral control constraint in the context of this setting is classified as terminal management with reachability by production volume during the planning period. The necessary conditions for the optimality of the strategy for managing the priorities of the criteria for the optimality of quality and the attainability of the planned task are determined. The analysis of numerical solutions of the test problem is given.

Keywords: production planning optimization, integral control constraint, static optimization

УДК 625.681.5

А.Г. Нагиев, Ф.А. Алиева, Г.А. Нагиев

О стратегии управления текущей интенсивностью производства при заданном объеме выпуска продукции

Рассматривается задача оптимизации статической системы, представляющейся некоторой функцией качества, которая находится под влиянием внешнего возмущения. Существование интегрального ограничения на управление в контексте данной постановки классифицируется как терминальное управление с достижимостью по объему производства в течение периода планирования. Определены необходимые условия оптимальности стратегии управления приоритетами критериев оптимальности качества и достижимости планового задания. Приведен анализ численных решений тестовой задачи.

Ключевые слова: оптимизация планирования производства, интегральное ограничение на управление, статическая оптимизация

Sumqayıt Dövlət Universiteti
Bakı Dövlət Universiteti
AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu

Təqdim olunub 04.03.2018